FH Bielefeld
University of Applied Sciences

AMMO
Angewandte Mathematische Modellierung & Optimierung

AMMO – Berichte aus Forschung und Technologietransfer

Lösungsansatz für ein bikriterielles Seminarproblem

Hermann-Josef Kruse, Bernhard Bachmann

Heft Nr. 11
Dezember 2018

Veröffentlichungsreihe (Onlinepublikation):
AMMO – Berichte aus Forschung und Technologietransfer

ISSN
2198-4824

Erscheinungsort
`https://www.fh-bielefeld.de/ium/forschung/forschungsschwerpunkte/ammo/veroeffentlichungen`

Herausgeber
Sprecher FSP AMMO, Fachhochschule Bielefeld

Fachhochschule Bielefeld
Fachbereich Ingenieurwissenschaften und Mathematik
FSP Angewandte Mathematische Modellierung und Optimierung
Interaktion 1
33619 Bielefeld

Vorwort

Ein Vier-Augen-Gespräch im Büro von Prof. B. in der vorletzten Vorlesungswoche des Wintersemesters 2017/18:

Prof. B.: *„Gestern war Stichtag zur Einreichung der Prioritätenlisten für das mathematische Seminar im Sommersemester. Demnach werden wir 35 Teilnehmerinnen und Teilnehmer zu betreuen haben. Da jeder von uns beiden 20 Vortragsthemen zur Auswahl gestellt hat, dürften alle teilnehmenden Studierende jeweils ein mehr oder weniger beliebtes Thema bekommen.“*

Prof. K.: *„Es sei denn, dass gewisse Themen von vielen Studierenden gleich hoch priorisiert worden sind, wonach es aber auf den ersten Blick nicht aussieht. Vielmehr scheint eine übliche Verteilung über nahezu alle Themen vorzuliegen. Da dürften wir wieder einmal ein gutes Angebot gemacht haben, wo für jeden etwas dabei zu sein scheint.“*

Prof. B.: *„Diesmal sollten wir uns aber vorher noch überlegen, ob wir auf unser 'altes' Zuweisungsverfahren zurückgreifen sollen. Denn es gab ja vereinzelt Klagen, dass die letzte Themenzuweisung 'ungerecht' gewesen sei.“*

Prof. K.: *„Ich erinnere mich, dass recht viele Studierende die Themen ihrer ersten Wahl zugewiesen bekamen und natürlich sehr zufrieden damit waren, im Gegenzug aber einige wenige in den sauren Apfel haben beißen müssen, indem sie nur noch Themen mit sehr niedrig angegebener Priorität zugewiesen bekamen, quasi zwangsläufig.“*

Prof. K.: *„Wir konnten zwar nachweisen, dass es im Schnitt keine bessere Zuweisung hätte geben können, allerdings eben nur im Schnitt über alle. Dieser Sachverhalt konnte die Leidtragenden allerdings nur mäßig trösten. Und in der Tat scheint eine Zuweisung* $1-1-1-4$ *auch weniger gerecht zu sein als vergleichsweise die Zuweisung* $2-2-2-2$. *Der aus der Statistik bekannte 'Bogen der Ungerechtigkeit' darf demnach nicht überspannt sein, um eine Rundum-Zufriedenheit herbeizuführen.“*

Prof. B.: *„Du meinst damit wohl, dass die gleichmäßige Vergabe der 2. Priorität an alle Beteiligten eher akzeptiert werden könnte als die Lösung mit dem niedrigeren Durchschnittswert 1,75 zwar, allerdings mit einem gewissen 'Kollateralschaden'. Demnach wäre das Zielkriterium nicht mehr 'Minimierung der Prioritätensumme', sondern 'Minimierung der maximal vergebenen Priorität'.“*

Prof. K.: *„Oder es könnten beide Kriterien in einen gewissen Einklang gebracht werden, indem die optimale Durchschnittslösung eine 'Solidaritätskomponente' hinzubekäme. Also ein typisches Beispiel für ein bikriterielles Optimierungsproblem.“*

Prof. B.: *„Es müsste ein Programm entwickelt werden, welches uns als Entscheidungsträgern alternative Lösungsvorschläge unterbreitet, sowohl individuell optimale in beide Zielrichtungen als auch 'gemischt-optimale'. Aus einem solchen Angebot an sog. Pareto-optimalen Lösungen müssen die Entscheidungsträger dann schließlich die wie auch immer beste Bauch-Lösung auswählen.“*

Prof. K.: *„Genau so ist es. Packen wir es an!“*

1 Einführung

Für die Zuweisung von Vortragsthemen an die Teilnehmer (m/w) eines Seminars gibt es in der Praxis je nach Fachgebiet und Studiengang einerseits und verantwortlicher Seminarleitung andererseits eine Fülle an individuellen organisatorischen Regelungen. Auch dürften Anzahl der Seminarteilnehmer (m/w) und didaktische Intention der Themenbehandlung und –präsentation eine wichtige Rolle bei der organisatorischen Abwicklung spielen, um nur einige Punkte zu nennen. So könnten bewusst gemeinsame Themen jeweils an mehrere Studierende vergeben werden (Gruppenarbeit). Auch ist es nicht unüblich, den Zuweisungsprozess nach dem FIFO-Prinzip zu gestalten („Wer zuerst kommt, mahlt zuerst“).

Im Studiengang *Angewandte Mathematik* der FH Bielefeld hat sich für die obligatorischen Module *Mathematisches Proseminar* und *Mathematisches Seminar* die folgende Zuweisungsprozedur bewährt: Bis zu einem Stichtag müssen sich interessierte Studierende in eine vorläufige Teilnehmerliste eintragen. Anhand der zu erwartenden Teilnehmerzahl wird eine entsprechend umfangreiche Themenliste erarbeitet und veröffentlicht. Die eingetragenen Studierenden können die Themen eine Zeit lang sichten und müssen bis zu einem zweiten Stichtag eine ausgefüllte Prioritätenliste einreichen. Hierbei sind N Themen mit den persönlichen Prioritäten (von 1 bis N) anzugeben, wobei die erste Priorität mit 1, die zweite mit 2 usw. zu deklarieren ist. Ebenso dürfen X Themen mit einem „$\times$“ versehen werden, was bedeutet, dass man diese Themen partout nicht bearbeiten möchte. Da das Themenangebot größer als die Teilnehmerzahl ist ($n > m$), kann grundsätzlich jedem Teilnehmer (m/w) genau ein Thema zugewiesen werden; umgekehrt wird ein Thema höchstens einmal vergeben. Allerdings kann nicht garantiert werden, dass jedem Teilnehmer (m/w) ein von ihm besonders priorisiertes Thema zugewiesen werden kann. Sind gewisse Themen von vielen Interessenten besonders priorisiert worden, müssen zwangsläufig auch weniger priorisierte Themen zugewiesen werden.

Es stellt sich nun die Grundsatzfrage nach einer „optimalen“ Themenzuweisung. Ein erster intuitiver Ansatz ist es, eine solche Themenzuweisung zu wählen, bei der die durchschnittliche Prioritätszahl minimal ausfällt. Hierzu muss die Summe der Prioritäten, die jeder Teilnehmer (m/w) dem schließlich zugewiesenen Thema gegeben hat, minimiert werden (*MinSum-Prinzip*). Diese Form der Güteabmessung einer Themenzuweisung führt auf ein *lineares Zuordungsproblem* (*linear assignment problem: LAP*), welches bekanntermaßen sehr einfach und exakt mit der *Ungarischen Methode* gelöst werden kann (hierzu siehe Abschn. 2.1).

Allerdings stellt sich hier sofort die Frage nach der „Gerechtigkeit“ der Zuweisung. Zwar liefert der obige Ansatz eine aus Sicht der Allgemeinheit beste Lösung, allerdings bleiben dabei „individuelle Schicksale“ unbeachtet. Hierzu ein Beispiel: Eine Zuweisung mit den Prioritäten (1,1,1,2,5) bei einer Teilnehmerzahl $m = 5$ liefert die Prioritätensumme 10 bzw. die durchschnittliche Prioritätszahl 2. Dabei werden vier Teilnehmern (m/w) eine (sub-)optimale Priorität zugestanden, allerdings auf Kosten der 5. Person, die eine besonders schlechte individuelle Zuweisung in Kauf nehmen muss. Die alternative Zuweisung (2,2,2,2,2) hat dieselbe Prioritätensumme bzw. durchschnittliche Prioritätszahl, weist aber keinen „Ausreißer“ auf, vielmehr scheint eine „gerechtere“ Lösung gefunden zu sein, die sich als „solidarisches Verhalten“ der Allgemeinheit interpretieren ließe.

Wird also eine „solidarische Lösung“ des Zuweisungsproblems angestrebt, bietet es sich an, die maximal vergebene Prioritätszahl in einer Zuweisung zu minimieren. Dieser Ansatz führt zu einem *MinMax-Zuweisungsproblem* (*linear bottleneck assignment problem: LBAP*), das seinerseits mit bekannten Methoden gelöst werden kann (hierzu siehe Abschn. 2.2).

In praktischen Fällen lässt sich beobachten, dass Zuweisungen, die nach dem MinSum-Prinzip ermittelt werden, keine „optimale“ Lösungen unter gleichzeitiger Berücksichtigung des MinMax-Prinzips darstellen. Zwar ziehen beide Zielkriterien in gewisser Weise in „fast dieselbe“ Richtung, weichen allerdings in ihren individuellen Ergebnissen nicht selten voneinander ab. Diese Abweichung lässt sich in „akademisch konstruierten“ Fällen beliebig steigern.

Beispiel: Für $m = 12$ angemeldete Studierende stehen $n = 15$ Themen zur Auswahl. Gemäß Auswahlregeln sind 5 Prioritäten (von 1 bis 5) und höchstens 5 Themenablehnungen ($\times$) einzutragen. Die folgende Tabelle enthält eine mögliche Prioritäteneinreichung.

Tabelle 1: Beispiel für eine Teilnehmertabelle mit Prioritäten

Teilnehmer (m/w) \ Thema	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	4	5						x	x	x	x	x
2	1	2	5	4	3	x	x	x	x	x					
3	2	1	x	x	x	3	4	5	x	x					
4	x	x	x	x	x						5	4	3	2	1
5						x	x	x	x	x	4	3	2	5	1
6			3	4	5	1	2				x	x	x	x	x
7			5	3	4	1	2				x	x	x	x	x
8	x	x	x	x	x						3	2	1	4	5
9						x	x	x	x	x	3	1	2	5	4
10	1	3	x	x	x	4	5	x	x						2
11	2	1	5	x	x	4	3						x	x	x
12	2	1				3			4	5	x	x	x	x	x

Betrachtet man die beiden folgenden Zuweisungen, so erkennt man, dass sich bei der ersten Zuweisung die Prioritätensumme 28 und die maximale Priorität 3 ergibt, während die zweite Zuweisung die Prioritätensumme 24 und die maximale Priorität 4 liefert.

Tabelle 2: Zwei mögliche Zuweisungen am Beispiel

Thema	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Teilnehmer (m/w)	12	11	1	7	2	3	6				9	8	5	4	10
Priorität	2	1	3	3	3	3	2				3	2	2	2	2

Thema	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Teilnehmer (m/w)	10	3	1	7	2	6	11		12			9	8	4	5
Priorität	1	1	3	3	3	1	3		4			1	1	2	1

Somit ist ein Entscheidungsträger (z.B. eine Seminarleitung) vor ein bikriterielles Zuweisungsproblem gestellt: Wie viel Solidarität (sprich Erhöhung der Prioritätssumme) ist nötig, um eine „gerechte Lösung für alle“ (sprich „vertretbare“ Maximalpriorität) zu erreichen. Ansätze zur Lösung dieses bikriteriellen Problems einer Seminarleitung werden in Abschn. 3 erläutert. Schließlich wird in Abschn. 4 ein Anwenderprogramm für das geschilderte Seminarproblem vorgestellt.

2 Mathematische Grundlagen

Die in der Einleitung angesprochenen Zuweisungsprobleme LAP und $LBAP$ gehören zur Klasse der kombinatorischen Optimierungsprobleme. Sie werden im Folgenden als mathematische Optimierungsmodelle vorgestellt (Abschn. 2.1 bzw. 2.2) und für das Seminarproblem adaptiert.

2.1 Das Seminarproblem als lineares Zuweisungsproblem

Bei einem ***linearen Zuweisungsproblem*** (*linear assignment problem: LAP*) sollen n Aufgaben (Jobs) auf n Personen verteilt werden, sodass jede Person P_i genau eine Aufgabe A_j zugewiesen bekommt. Dabei soll die Summe aller Kosten (Aufwände, Zeiten) c_{ij}, die anfallen, wenn die Person P_i die Aufgabe A_j erhält, minimiert werden.

Für das zugehörige mathematische Optimierungsproblem werden binäre Variablen x_{ij} eingeführt, wobei $x_{ij} = 1$

den Fall der umkehrbar eindeutigen Zuweisung der Person P_i zur Aufgabe A_j beschreibt ($P_i \leftrightarrow A_j$); bei Nichtzuweisung gilt $x_{ij} = 0$.

$$\begin{aligned}
&\min ! \; z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \\
&\text{u.d.N.} \\
&\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n, \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n, \\
&x_{ij} \in \{0; 1\}, \quad i, j = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{1}$$

Eine alternative Modellformulierung erfolgt anhand der Menge Π_n aller Permutationen über der Indexmenge $\{1, \ldots, n\}$ durch

$$\min_{\pi \in \Pi_n} \sum_{i=1}^{n} c_{i,\pi(i)}. \tag{2}$$

Damit das Seminarproblem als LAP gemäß obiger Standardform aufgefasst werden kann, müssen folgende Anpassungen erfolgen: Die von den Teilnehmern (m/w) vergebenen Prioritäten werden als Kosten c_{ij} interpretiert. Strikt abgelehnte Themen ($\times$) werden mit einer hinreichend großen Prioritätszahl belegt („∞“). Nicht priorisierte, aber auch nicht strikt abgelehnte Themen werden mit einem großen Strafwert belegt, der sich signifikant von der größten vergebenen Prioritätszahl abhebt. Damit soll erreicht werden, dass jeder Teilnehmer (m/w) ein von ihm priorisiertes Thema zugewiesen bekommt. Im realen Problem wird $m < n$ angenommen. Daher werden $n - m$ fiktive Teilnehmer (m/w) hinzugefügt, für die jedes Thema mit der Priorität 1 belegt wird. In der Ergebnisinterpretation werden die fiktiven Teilnehmer (m/w) vernachlässigt.

Beispiel: Für das obige Beispiel werden $n - m = 3$ fiktive Teilnehmer (m/w) hinzugefügt. Die Leerfelder werden mit 50 und die $\times$-Felder mit ∞ aufgefüllt. Bei der rechentechnischen Implementierung wird ∞ durch eine sehr große Zahl ersetzt, z.B. durch 10^6. Die dadurch entstandene „Arbeitstabelle“ wird als Kostenmatrix $C = (c_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ des LAP aufgefasst ($n = 15$).

Tabelle 3: Kostenmatrix für Ungarische Methode am Beispiel

	Thema														
Teilnehmer (m/w)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
1	1	2	3	4	5	50	50	50	50	50	∞	∞	∞	∞	∞
2	1	2	5	4	3	∞	∞	∞	∞	∞	50	50	50	50	50
3	2	1	∞	∞	∞	3	4	5	∞	∞	50	50	50	50	50
4	∞	∞	∞	∞	∞	50	50	50	50	50	5	4	3	2	1
5	50	50	50	50	50	∞	∞	∞	∞	∞	4	3	2	5	1
6	50	50	3	4	5	1	2	50	50	50	∞	∞	∞	∞	∞
7	50	50	5	3	4	1	2	50	50	50	∞	∞	∞	∞	∞
8	∞	∞	∞	∞	∞	50	50	50	50	50	3	2	1	4	5
9	50	50	50	50	50	∞	∞	∞	∞	∞	3	1	2	5	4
10	1	3	∞	∞	∞	4	5	∞	∞	50	50	50	50	50	2
11	2	1	5	∞	∞	4	3	50	50	50	50	50	∞	∞	∞
12	2	1	50	50	50	3	50	50	4	5	∞	∞	∞	∞	∞

Als effizientes Lösungsverfahren für LAP bietet sich die ***Ungarische Methode*** an.[1]

[1] Hierzu siehe Kuhn (1955, 1956); eine ausführliche Beschreibung der Ungarischen Methode findet man u.a. in Domschke (1995).

Beispiel: Im obigen Beispiel liefert die Ungarische Methode die unten angegebene Zuweisung mit minimaler Prioritätensumme 24 bzw. durchschnittlicher Prioritätszahl 2,0. Der „schlimmste Fall“ ist Teilnehmer 12, der ein Thema mit angegebener Priorität 4 zugewiesen bekommt.

Tabelle 4: Zuweisung via Ungarische Methode am Beispiel

Thema	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Teilnehmer (m/w)	10	3	1	7	2	6	11		12			9	8	4	5
Priorität	1	1	3	3	3	1	3		4			1	1	2	1

An dieser Stelle sei bereits angemerkt, dass es nicht selten alternative optimale Zuweisungen gibt, von denen die Ungarische Methode allerdings nur eine bestimmt. Im Zusammenhang mit der bikriteriellen Problemstellung wird auf diesen Sachverhalt in Abschn. 3 noch näher eingegangen.

2.2 Das Seminarproblem als MinMax-Zuweisungsproblem

Durch die Änderung der Zielfunktion ergibt sich das folgende ***MinMax-Problem*** (*Linear Bottleneck Assignment Problem: LBAP*):

$$\begin{aligned}
&\min! \max_{i,j=1,\dots,n} \{c_{ij} \mid x_{ij} = 1\} \\
&\text{u.d.N.} \\
&\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,\dots,n, \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,\dots,n, \\
&x_{ij} \in \{0;1\}, \quad i,j = 1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{3}$$

Eine alternative Modellformulierung anhand der Menge Π_n aller Permutationen über $\{1,\dots,n\}$ lautet:

$$\min_{\pi \in \Pi_n} \max_{1 \le i \le n} c_{i,\pi(i)}. \tag{4}$$

Das reale Seminarproblem (ohne fiktive Teilnehmer (m/w), d.h. $m < n$) führt auf folgende Modellvariante:

$$\begin{aligned}
&\min! \max_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \{c_{ij} \mid x_{ij} = 1\} \\
&\text{u.d.N.} \\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le 1, \quad j = 1,\dots,n, \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,\dots,m, \\
&x_{ij} \in \{0;1\}, \quad i = 1,\dots,m; j = 1,...,n.
\end{aligned} \tag{5}$$

Eine alternative Modellformulierung anhand der Menge $N_{m,n}$ aller injektiven Abbildungen $\nu : \{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}$ lautet:

$$\min_{\nu \in N_{m,n}} \max_{1 \le i \le m} c_{i,\nu(i)}. \tag{6}$$

Zur Lösung des $LBAP$ lassen sich verschiedene (exakte) Verfahren anwenden. Hierzu gehören der *Threshold-Algorithmus*[2] und die *Augmented-Path-Methode*[3] sowie ein dualer Lösungsansatz („*dual method*")[4]. Ein weiteres Lösungsverfahren findet man in Pundir et al. (2015), welches im Zusammenhang mit der bikriteriellen Problemstellung besonders gut geeignet ist und im Folgenden vorgestellt wird.

Das Verfahren beginnt mit einer zulässigen Anfangslösung, z.B. via Ungarische Methode.[5] In jeder weiteren Iteration wird gezielt die Kostenmatrix C geändert, sodass sich die MinMax-Lösung unter Inkaufnahme der Verschlechterung der jeweiligen MinSum-Lösung zwangsläufig verbessert; andernfalls bricht das Verfahren ab.

Verfahren zur Lösung des MinMax-Problems via Ungarische Methode:
Eingabe: $m \times n$-Kostenmatrix $C = (c_{ij})$, binäre $m \times n$-Matrix $X = (x_{ij})$.[6]
Schritt 0: Bestimme $c^* := \max\{c_{ij} | x_{ij} = 1\}$.
Schritt 1: Verwandle die Kostenmatrix $C = (c_{ij})$ in die Matrix $\bar{C} = (\bar{c}_{ij})$ mit

$$\bar{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, \text{ falls } c_{ij} < c^* \\ \infty, \text{ falls } c_{ij} \geq c^* \end{cases} .$$

Schritt 2: Berechne via Ungarische Methode eine optimale Lösung $\bar{X} = (\bar{x}_{ij})$ für das *LAP* zur Matrix $\bar{C}$ und bestimme $\bar{c}^* := \max\{\bar{c}_{ij} | \bar{x}_{ij} = 1\}$. Falls $\bar{c}^* < c^*$, setze $C := \bar{C}, X := \bar{X}, c^* := \bar{c}^*$ und gehe zu Schritt 1; andernfalls terminiere ■

Beispiel: Man betrachte wiederum das obige Beispiel (vgl. Einleitung). Zunächst wird die zulässige Startlösung $X = (x_{ij})$ anhand der Ungarischen Methode ermittelt. In der folgenden Tabelle sind diejenigen Kostenkoeffizienten c_{ij}, für die $x_{ij} = 1$ gilt, gelb unterlegt. Für den aktuellen Zielfunktionswert gilt: $MinMax(X) = 4$. Im Gegenzug ist das zugehörige MinSum-Problem optimal gelöst (die Prioritätensumme beträgt 24).

Tabelle 5: Zuweisung via Ungarische Methode an ursprünglicher Kostenmatrix

		Thema														
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Teilnehmer (m/w)	**1**	1	2	3	4	5	50	50	50	50	50	∞	∞	∞	∞	∞
	2	1	2	5	4	3	∞	∞	∞	∞	∞	50	50	50	50	50
	3	2	1	∞	∞	∞	3	4	5	∞	∞	50	50	50	50	50
	4	∞	∞	∞	∞	∞	50	50	50	50	50	5	4	3	2	1
	5	50	50	50	50	50	∞	∞	∞	∞	∞	4	3	2	5	1
	6	50	50	3	4	5	1	2	50	50	50	∞	∞	∞	∞	∞
	7	50	50	5	3	4	1	2	50	50	50	∞	∞	∞	∞	∞
	8	∞	∞	∞	∞	∞	50	50	50	50	50	3	2	1	4	5
	9	50	50	50	50	50	∞	∞	∞	∞	∞	3	1	2	5	4
	10	1	3	∞	∞	∞	4	5	∞	∞	50	50	50	50	50	2
	11	2	1	5	∞	∞	4	3	50	50	50	50	50	∞	∞	∞
	12	2	1	50	50	50	3	50	50	4	5	∞	∞	∞	∞	∞

Gemäß Schritt 1 wird die Matrix C auf Basis des aktuellen MinMax-Wertes $c^* = 4$ (Schritt 0) wie folgt verwandelt:

[2] Vgl. Burkhard et al. (2009) S. 174ff.
[3] Vgl. Burkhard et al. (2009) S. 178ff.
[4] Vgl. Burkhard et al. (2009) S. 177f.
[5] Da in jedem Folgeschritt die Ungarische Methode aufgerufen wird, bietet es sich auf kanonische Weise an, auch die zulässige Startzuweisung bereits mit dieser zu ermitteln. Diese Empfehlung gilt insbesondere für die bikriterielle Problemstellung (Abschn. 3), um zu erreichen, dass auch bereits die Startzuweisung eine Pareto-optimale Lösung ist.
[6] Es wird grundsätzlich vorausgesetzt, dass die Matrix $X = (x_{ij})$ eine zulässige Lösung von (5) beschreibt ($m \leq n$).

Tabelle 6: Modifizierte Kostenmatrix (anhand des MinMax-Wertes $c^* = 4$)

		Thema														
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Teilnehmer (m/w)	**1**	1	2	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	2	1	2	∞	∞	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	3	2	1	∞	∞	∞	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3	2	1
	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3	2	∞	1
	6	∞	∞	3	∞	∞	1	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	7	∞	∞	∞	3	∞	1	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3	2	1	∞	∞
	9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3	1	2	∞	∞
	10	1	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	2
	11	2	1	∞	∞	∞	∞	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	12	2	1	∞	∞	∞	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Die Lösung des zugehörigen *LAP* via Ungarische Methode liefert eine optimale Lösung für das *LBAP*:

Tabelle 7: Optimale MinMax-Zuweisung am Beispiel

		Thema														
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Teilnehmer (m/w)	**1**	1	2	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	2	1	2	∞	∞	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	3	2	1	∞	∞	∞	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3	2	1
	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3	2	∞	1
	6	∞	∞	3	∞	∞	1	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	7	∞	∞	∞	3	∞	1	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3	2	1	∞	∞
	9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3	1	2	∞	∞
	10	1	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	2
	11	2	1	∞	∞	∞	∞	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	12	2	1	∞	∞	∞	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

An dieser Stelle sei ebenfalls angemerkt, dass es alternative optimale Zuweisungen geben kann.

3 Das Seminarproblem als bikriterielles Zuweisungsproblem

Das Problem der Bestimmung einer „besten“ Zuweisung von Vortragsthemen an die Seminarteilnehmer (m/w) unter „weitestgehender“ Berücksichtigung von individuell geäußerten Prioritäten ist bereits angesprochen worden (vgl. Vorwort und Einleitung). Dabei ist die Frage zu klären, was unter „beste“ oder „optimale“ Zuweisung zu verstehen sein soll. Eine MinSum-Zuweisung, bei der die durchschnittliche vergebene Priorität minimal ausfällt, wird mit Hilfe der Ungarischen Methode ermittelt. Eine Zuweisung, bei der die größte Abweichung vom am meisten priorisierten Thema am kleinsten ist, wird mit dem vorgestellten Verfahren zur Lösung der MinMax-Problematik bestimmt, wobei allerdings die organisatorischen Regelungen zur Prioritätenangabe eine mitentscheidende Rolle spielen. Hierzu ein paar Beispielszenarien:

- Eine empfehlenswerte Regelung zur individuellen Angabe der Prioritäten ist gegeben, wenn darauf bestanden wird, dass mindestens p verschiedene Prioritäten abgegeben werden müssen, und zwar jeweils eindeutig von 1 bis p $(1 < p \leq n)$.[7] In diesem Fall tritt jede Zahl aus der Menge $P = \{1, 2, \ldots, p\} \subset \mathbb{N}$ in der Prioritätenangabe eines jeden Teilnehmers (m/w) genau einmal auf. Diese Regelung wird im Folgenden auch als der „Normalfall“ angesehen.

[7] Im Folgenden wird $n \equiv$ Anzahl der Themen und $m \equiv$ Anzahl der Teilnehmer (m/w) aufgefasst, wobei $m \leq n$ gelte.

- Hiervon kann problemlos abgewichen werden, indem eine Mehrfachvergabe von Prioritätszahlen aus P zugelassen wird. Im Falle $p < n$ kann zudem eine individuelle Erweiterung der Menge P zugelassen werden, solange auch alle Zahlen aus P benutzt werden.
- Problematisch kann es werden, wenn beliebige natürliche Zahlen in beliebiger Anzahl bei der Prioritätenvergabe zugelassen werden. So könnte man durch die Angabe allein der Priorität 1 (und ggf. sonstiger sehr großer Zahlen) versuchen, genau diese Themenzuweisung mit der Priorität 1 zum persönlichen Vorteil zu erzwingen.
- Wenn beliebige Zahlen angegeben werden (dürfen) und speziell dabei die kleinste angegebene Zahl größer 1 ist, wird zwar der freien Meinungsäußerung viel Raum gelassen, dem eigentlichen Ziel der individuellen Prioritätenanzeige allerdings ein „Bärendienst" erwiesen. Der Fall, dass die kleinste angegebene Priorität größer 1 ist, ließe sich durch eine „Normierung auf 1" zwar noch begradigen, allerdings träfe ggf. die im vorigen Punkt dargestellte Einflussnahme weiterhin zu.

An dieser Stelle soll festgehalten werden, dass im Folgenden zwar immer eine „sinnvolle" organisatorische Regelung für die Prioritätenangaben im Vorfeld unterstellt wird („Normalfall"), das hier behandelte Verfahren zur Ermittlung von Lösungen für die betrachteten Zuweisungsprobleme hiervon aber grundsätzlich unabhängig funktioniert. Lediglich kann es bei Interpretation der Lösungen in Abhängigkeit von diesen organisatorischen Regelungen zu Problemen oder Missverständnissen führen.

Im Folgenden werde das ***bikriterielle Zuweisungsproblem*** der Form

$$\begin{aligned}
&\text{„}\min\text{“!}\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij} \\ \max\limits_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \{c_{ij}\cdot x_{ij}\} \end{pmatrix} \\
&\text{u.d.N.} \\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le 1, \quad j = 1,\dots,n, \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,\dots,m, \\
&x_{ij} \in \{0;1\}, \quad i = 1,\dots,m; j = 1,...,n
\end{aligned} \tag{7}$$

betrachtet.[8]

Es sei $X = (x_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ eine zulässige Zuweisung von (7). Dann liefert $z_1(X)$ die *Prioritätensumme* und $z_2(X)$ das *Prioritätenmaximum* von X. Auf kanonische Weise wird in einer (zulässigen) Zuweisung X das Prioritätenmaximum mindestens einmal vergeben, oft aber auch mehrmals. Die Anzahl, wie oft das Prioritätenmaximum in einer Zuweisung X vergeben wird, werde die *Maximumhäufigkeit* von X genannt und mit $z_3(X)$ bezeichnet. Dies stellt sozusagen ein Tertiärkriterium für die Gütemessung einer Zuweisung dar.

Es sei nun das Ziel, „gute" Lösungen für (7) zu finden. Aus der Theorie für *Vektormaximumprobleme*[9] besteht dies im Wesentlichen in der Suche nach sog. *Pareto-optimalen Lösungen*[10] und im Idealfall nach der *perfekten Lösung*[11].

Beispiel: Im obigen Beispiel (vgl. Einleitung) ergeben sich individuell optimale Lösungen zum MinSum- bzw.

[8] Vollständigkeitshalber sei noch eine alternative Modellformulierung anhand der Menge $N_{m,n}$ aller injektiven Abbildungen von $\{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}$ aufgeführt:

$$\text{„}\min_{\nu\in N_{m,n}}\text{“} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} c_{i,\nu(i)} \\ \max\limits_{1\le i\le m} c_{i,\nu(i)} \end{pmatrix}.$$

[9] In der Literatur auch als *Multiple Criteria Decision Making Problems* (*MCDM*-Probleme) oder *Probleme mit mehrfacher Zielsetzung* bekannt; hierzu siehe einschlägige Standardliteratur, z.B. Steuer (1986), Zimmermann/Gutsche (1992), Triantaphyllou (2000).

[10] Von einer *Pareto-optimalen Lösung* spricht man, wenn man sich bei einer Verbesserung in einem Ziel in den anderen Zielen nur noch verschlechtern kann, genauer gesagt: in mindestens einem anderen Ziel verschlechtern muss. Die meisten Probleme mit mehrfacher Zielsetzung besitzen eine große Zahl von Pareto-optimalen Lösungen. Dann ist das Folgeziel, diejenige Pareto-optimale Lösung zu finden, welche die Zielpräferenzen des Entscheiders am besten widerspiegelt.

[11] Eine solche ergibt sich dann, wenn sie in allen Zielen den jeweiligen Optimalwert erreicht und darüber hinaus eine zulässige Lösung darstellt. Bei Existenz einer perfekten Lösung liegt kein echter Zielkonflikt vor.

MinMax-Problem mit den entsprechenden Zielfunktionswerten $z_1^{min} = 24$ bzw. $z_2^{min} = 3$, wobei der zugehörige Zielfunktionswert des jeweiligen Sekundärkriteriums $z_2 = 4$ bzw. $z_1 = 26$ beträgt (vgl. Abschn. 2.1 bzw. 2.2). Die beiden Zielvektoren $(24;4)^T$ und $(26;3)^T$ stellen somit *effiziente* (*nicht-dominierte*) Lösungen des bikriteriellen Zuweisungsproblem dar (und zwar nachweislich die einzigen). Die zugehörigen Zuweisungen sind demnach *Pareto-optimale* Lösungen, sodass ein echter Zielkonflikt vorliegt. Die endgültige Wahl der „insgesamt besten" Zuweisung bleibt nach wie vor dem Entscheidungsträger überlassen.

In der Theorie der Probleme mit mehrfacher Zielsetzung wird eine Vielzahl von Ansätzen zur Entscheidungsunterstützung vorgestellt.[12] Für das vorliegende Seminarproblem soll diese Entscheidungsunterstützung allein anhand von Zusatzinformationen zu den Pareto-optimalen Lösungen erfolgen. Der Hauptgrund dafür ist der Sachverhalt, dass bei Realproblemen ($m, n \leq 50$) die (allemal endliche) Menge der effizienten Lösungen „überschaubar klein" sein wird. Daher sollen im Folgenden einige entscheidungsunterstützende Zusatzkriterien diskutiert werden.

Weitere Kriterien zur Beurteilung einer Zuweisung

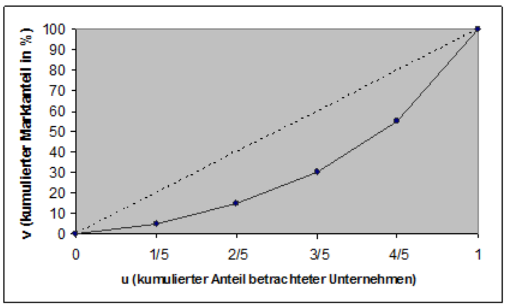
In der beschreibenden Statistik werden ***Konzentrationsmaße*** zur Analyse und Beurteilung von *Verteilungs-* oder *Konzentrationstendenzen* von erhobenen Datensätzen eines kardinalen Merkmals benutzt, z.B. die Frage nach den „oberen Zehntausend" (*Wie viele Vermögensanteile einer Volkswirtschaft sind in den Händen von wie wenigen Reichen*) oder zu Marktanteilen von Marktführern.

Hierzu werden die einzelnen Merkmalswerte eines Datensatzes $\{x_1, \ldots, x_n\}$ als geordnet angenommen (und ggf. nichtnegativ transformiert): $0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n$. Die Konzentration der Daten lassen sich grafisch anhand der sog. ***Lozenzkurve*** veranschaulichen. Dazu werden folgendermaßen $n+1$ Punkte (u_i, v_i) definiert:

$$u_i = \frac{i}{n} \text{ für } i = 0, 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad v_i = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0 \\ \frac{\sum_{j=1}^{i} x_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j} & \text{für } i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Die Lorenzkurve L ist der Polygonzug, der die Punkte $(u_i, v_i), i = 0, 1, \ldots, n$, verbindet und stellt den Graph einer auf [0;1] definierten, monoton wachsenden, konvexen Funktion dar. Offensichtlich ist $(u_0, v_0) = (0, 0)$ und $(u_n, v_n) = (1, 1)$.

Beispiel:
5 Unternehmen teilen sich 5, 10, 15, 25 bzw. 45 Prozent aller Marktanteile. Die zugehörige Lorenzkurve hat dann die folgende Form:



Durch die Lorenzkurve wird verdeutlicht, wieviel (Prozent) der Merkmalssumme auf die x (Prozent) kleinsten Merkmalsträger entfällt. Je stärker die „Ungleichheit" der Verteilung, d.h. je stärker die Konzentration, desto stärker hängt die Kurve L gegenüber der Diagonalen durch (manchmal auch „Bogen der Ungerechtigkeit" genannt). Dementsprechend wird das Verhältnis der Fläche zwischen der Diagonalen und der Lorenzkurve zur Fläche zwischen der Diagonalen und der u-Achse zur Definition des folgenden *Konzentrationsmaßes* herangezogen[13]:

[12] Hierzu gehören *Lexikografische Methode*, *Zielgewichtungsmethode*, *Satisfizierungsmethode* sowie *Goal Programming*, um nur einige zu nennen; vgl. einschlägige Literatur, z.B. Steuer (1986), Zimmermann/Gutsche (1992), Triantaphyllou (2000).

[13] Näheres zu Konzentrationsmaßen findet man in einschlägiger Statistik-Literatur, u.a. in Bamberg et al. (2012) und Bosch (1998).

Zu n geordneten Merkmalswerten $0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n$ heißt die Zahl

$$G = \frac{2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} i \cdot x_i - (n+1) \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \tag{8}$$

der ***Gini-Koeffizient*** und $G^* = \frac{n}{n-1} \cdot G$ der ***normierte Gini-Koeffizient***. Durch Betrachtung der beiden Grenzfälle, dass alle x_i gleich sind bzw. nur x_n von Null verschieden ist, macht man sich leicht klar, dass gilt: $0 \leq G \leq G^* \leq 1$ (und $G < G^*$ im Fall $G > 0$).

Für das Seminarproblem bietet sich eine Modifikation an. Unter normalen Voraussetzungen (d.h. bei einer geforderten Prioritätenvergabe aus der Menge $P = \{1, \ldots, p\} \subset \mathbb{N}$ ergibt sich ein Gini-Wert G mit

$$0 \leq G \leq \frac{(n-1) \cdot (p_{max} - p_{min})}{n^2 \cdot p_{min} + n \cdot (p_{max} - p_{min})}, \tag{9}$$

wobei p_{max} die maximale und p_{min} die minimale Prioritätszahl der Zuweisung ist ($p_{max} \geq p_{min} \geq 1$). Die untere Schranke wird genau dann erreicht, wenn alle vergebenen Prioritäten gleich sind ($p_{max} = p_{min}$), z.B. (2,2,2,2,2) bei $n = 5$. Die obere Schranke ergibt sich genau dann, wenn alle vergebenen Prioritäten bis auf eine (größte) gleich sind, z.B. (1,1,1,1,4).

Man beachte, dass unter der Voraussetzung $p_{min} \geq 1$ selbst der oben zitierte *normierte Gini-Koeffizient* den Wert 1 nicht erreichen kann. Um den „schlimmsten Fall“ unter dieser Voraussetzung auf 1 zu normieren, müsste der Gini-Wert mit dem inversen Wert der oberen Schranke multipliziert werden oder aber es müssten sämtliche Prioritätenwerte um die Minimalpriorität p_{min} reduziert werden.

Man beachte zudem, dass der (normierte) Gini-Koeffizient die Konzentration der Verteilung einer fest vorgegebenen „Masse“ unter n „Anteilhabern“ misst, hier speziell eine Prioritätensumme unter Teilnehmern (m/w). Somit lassen sich anhand des (normierten) Gini-Koeffizienten streng genommen nur Zuweisungen mit identischer Prioritätensumme vergleichen. Beispielsweise haben die beiden Zuweisungen (1,1,1,1,1) und (2,2,2,2,2) denselben Gini-Wert ($G = 0$).

Dennoch lässt sich der (normierte) Gini-Koeffizient unter Berücksichtigung der erläuterten Einschränkungen als ein Maß für den „Solidaritätsgrad“ einer Zuweisung verwenden.

Zusätzlich oder ersatzweise kann als ein „Maß für die Solidarität“ einer Zuweisung X auch die Varianz $V(X)$ bzw. die Standardabweichung $\sigma(X)$ der gemäß X vergebenen Prioritäten $p_{1,\nu(i)}, \ldots, p_{m,\nu(m)}$ verwendet werden, falls $x_{i,\nu(i)} = 1$ für $i = 1, \ldots, m$:

$$V(X) = \tfrac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} (p_{i,\nu(i)} - \tfrac{1}{m} \cdot z_1(X))^2 \text{ bzw. } \sigma(X) = \sqrt{V(X)}. \tag{10}$$

In den meisten Anwendungsfällen liefern die beiden Zusatzkriterien „Gini-Koeffizient“ und „Varianz“ unabhängig voneinander dieselbe Information. Allerdings gibt es vereinzelt Fälle, bei denen zwei (Pareto-)optimale Zuweisungen denselben Gini-Koeffizienten aufweisen, sich allerdings in der Varianz unterscheiden (und umgekehrt), wodurch die Angabe beider Zusatzkriterien zur Entscheidungsunterstützung legitimiert wird.

Darüber hinaus lassen sich alternative (Pareto-)optimale Lösungen (mit jeweils demselben MinSum- und MinMax-Wert) dahingehend unterscheiden, wie häufig in ihnen der MinMax-Wert zugewiesen wird. So könnte der weniger häufige „schlimmste Fall“ für einen Entscheidungsträger bei der Wahl der Zuweisung den Ausschlag geben. Beispielsweise könnte die Zuweisung (1,2,2,2,3) mit Häufigkeitswert 1 der Zuweisung (1,1,2,3,3) mit Häufigkeitswert 2 vorgezogen werden. Man sollte allerdings beachten, dass dieses Zusatzkriterium nur dann zum Einsatz kommen sollte, wenn sich der Zuweisungsvergleich auf alternative (Pareto-)optimale Lösungen bezieht, insbesondere also der MinMax-Wert identisch ist.

Die drei in diesem Abschnitt vorgestellten Zusatzkriterien (Gini-Koeffizient, Varianz, Häufigkeitswert) werden im Entscheidungsunterstützungsprogramm, welches im folgenden Abschnitt vorgestellt wird, zusammen mit den beiden Hauptkriterien (MinSum- und MinMax-Wert) ermittelt und zur Verfügung gestellt.

4 Programm zur Lösung des Seminarproblems

Das im Folgenden vorgestellte Programm ist unter Excel-VBA 2013 entwickelt worden. Es lässt sich nach erfolgter Dateneingabe als Makro *Aufruf_Verfahren* starten. Ein- und Ausgaben erfolgen anhand von Excel-Tabellen.

In der *Teilnehmertabelle* werden pro Teilnehmer (m/w) zeilenweise die individuell gewählten Prioritäten zu den Themen eingegeben. Dabei bedeuten die „x“-Einträge, dass diese Themen nicht bearbeitet werden wollen. Leere Felder bedeuten keine strikten Ablehnungen, aber auch keine priorisierten Wunschthemen.

		Themen																																	
Teilnehmer (m/w)		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**
Teilnehmer_1	**1**	1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Teilnehmer_2	**2**					4			x	x		3			1	2	x	x	x	x	x	x					5						x	x	6
Teilnehmer_3	**3**					4				x	x	3			2	1	x	x	x	x	x	x									5		x	x	
Teilnehmer_4	**4**					x	x	x	x	x	x	1	4	5	2	3													x	x	x	x			
Teilnehmer_5	**5**		3	2	1	x	x	x	x	x	x	4	5		7	6	x	x		x		x													
Teilnehmer_6	**6**					1	2	3	6								5											x	x	x	x	x	x	4	x
Teilnehmer_7	**7**			3	2												5	4												1					
Teilnehmer_8	**8**		1	3	2												4	5																	
Teilnehmer_9	**9**		4	5	x	x	x	x	x	x	x						1	2	3								x	x	x						
Teilnehmer_10	**10**		x	x	x	7	6		1		4			3			5		2	x							x	x		x		x			
Teilnehmer_11	**11**		3	2	1	x	x	x	x	x	x	5			4	6			x	x	x	x													
Teilnehmer_12	**12**					x	x	x	x	x	x				3	1		5	6								x	x	x					4	2
Teilnehmer_13	**13**					x	x	x	x	x	x	1	2			3			x	x	x	x						4		5					
Teilnehmer_14	**14**		x	x	x	x	x	x	x	x	x				4	2	1													5	3				
Teilnehmer_15	**15**		x	x	x	x	x	x	x	x	x	6			4	5																	3	2	1
Teilnehmer_16	**16**					6				x	x	3			1	4			2			5					7			x	x	x			
Teilnehmer_17	**17**	x	x	x	x	x				3										4	5	1					x							x	2
Teilnehmer_18	**18**															5	x	x	x	x	x	x						2	4			x	3		1
Teilnehmer_19	**19**					x	x	x	x	x	x						6	5	4	1	2	3											x		
Teilnehmer_20	**20**					10						11	12	13	x	x	x	x	1			5	6	7	8	9	3	x	x	x	x	x	x	2	4
Teilnehmer_21	**21**		1	3	2	x	x	x	x	x	x	6	5	4															x	x	x	x			
Teilnehmer_22	**22**		1	3	2	x	x	x	x	x	x	6	4	5															x	x	x	x			
Teilnehmer_23	**23**	x	x	x	x												5	6	1	3	2	4													
Teilnehmer_24	**24**					5	2	4				6	3	1	7	8																		9	
Teilnehmer_25	**25**	x	x	x	x		1	3	2	4	x						8			x	x	7									5	6			
Teilnehmer_26	**26**							3	2	1							4		5																
Teilnehmer_27	**27**		x	x	x	x						1	5			2											x	x	x	x	x	x		3	4
Teilnehmer_28	**28**											1	2	3	4	5							8	9	10	11								6	7

Eine Umsetzung dieser Einträge für den Rechenprozess erfolgt anhand der Daten in der *Parametertabelle*. Hier sind folgende Daten einzugeben:

Anzahl Themen:	**34**
Anzahl Teilnehmer:	**28**
Leerfeld-Bewertung	**50**
x-Feld-Bewertung	**1000**

Demnach werden im Programm genau $n = 34$ Themen und $m = 28$ Teilnehmer (m/w) aus der Teilnehmertabelle beachtet.[14] Die Leerfelder werden mit der fiktiven Priorität 50 versehen, die „x“-Einträge mit Priorität 1000 berechnet.[15] Das Programm erwartet den Fall $m \leq n$; andernfalls wird eine Fehlermeldung ausgegeben.

Die Lösungen werden in der *Ergebnistabelle* ausgegeben. Für obiges Beispiel ergibt sich eine perfekte Lösung, d.h. die ausgegebene Zuweisung liefert für beide Zielsetzungen das jeweilige Minimum, weswegen auch nur eine Ergebniszeile erscheint.[16]

Zuweisung	MinSum-Wert	MinMax-Wert	Gini-Wert	Varianz	Häufigkeit	Themen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
1	57	4	0,301	1,369	5	Teilnehmer	**1**	**22**	**11**	**5**	**6**	**25**	**24**	**10**	**26**		**4**	**28**	**21**	**2**	**3**	**8**	**9**	**16**	**19**	**23**	**17**					**20**	**13**	**18**	**7**	**14**		**15**	**27**	**12**
						Prioritäten	1	1	2	1	1	1	4	1	1		1	2	4	1	1	4	2	2	1	2	1					3	4	4	1	3		3	3	2

Als Alternative dazu soll das folgende fiktive Beispiel dienen.

Anzahl Themen:	**9**
Anzahl Teilnehmer:	**9**
Leerfeld-Bewertung	**50**
x-Feld-Bewertung	**1000**

[14] In der aktuellen Programmversion sind maximal $n = 50$ Themen zugelassen.

[15] Die geänderten Daten werden in der (ausgeblendeten) *Arbeitstabelle* zwischengespeichert.

[16] Es sei angemerkt, dass dieses Beispiel einem konkreten Realfall im Studiengang *Angewandte Mathematik* entspricht. Dabei war die Vergabe von Thema Nr. 1 aufgrund einer Sonderregelung von vornherein gesetzt.

	Themen								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	2	3	4	5	6			
2		1	2	3	4	5	6		
3			1	2	3	4	5	6	
4				1	2	3	4	5	6
5	6				1	2	3	4	5
6	5	6				1	2	3	4
7	4	5	6				1	2	3
8	3	4	5	6				1	2
9	1	2	3	5	6	4			6

Zuweisung	MinSum-Wert	MinMax-Wert	Gini-Wert	Varianz	Häufigkeit	Themen	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	14	6	0,317	2,778	1	Teilnehmer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
						Prioritäten	1	1	1	1	1	1	1	1	6
2	15	4	0,311	1,750	2	Teilnehmer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**9**	**7**	**8**	**6**
						Prioritäten	1	1	1	1	1	4	1	1	4
3	17	2	0,052	0,111	8	Teilnehmer	**1**	**9**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
						Prioritäten	1	2	2	2	2	2	2	2	2

Der Ergebnistabelle ist zu entnehmen, dass drei Pareto-optimale Zuweisungen zur Auswahl stehen. Das MinSum-Problem weist als minimale Prioritätensumme 14 bzw. als bestmögliche durchschnittliche Priorität $1,\bar{5} = \frac{14}{9}$ auf, allerdings bei gleichzeitig hohem MinMax-Wert 6 (vgl. Zuweisung Nr. 1). Umgekehrt lässt sich der MinMax-Wert auf den Minimalwert 2 reduzieren, allerdings bei Erhöhung der Prioritätensumme um 3 auf 17, was einer durchschnittlichen Priorität $1,\bar{8}$ entspricht (vgl. Zuweisung Nr. 3). Die Zuweisung Nr. 2 stellt in gewisser Weise eine „Kompromisslösung“ dar. Anhand der Gini-Werte und der Varianzen lässt sich leicht ablesen, dass die Zuweisung Nr. 3 eine „überaus solidarische Lösung“ darstellt. Nichtsdestotrotz bleibt es allein dem Entscheidungsträger(team) überlassen, die endgültige Zuweisung zu vergeben.

In der vorgestellten Programmversion ist (noch) nicht realisiert, dass zu einer (Pareto-)optimalen Zuweisung, welche zu einem bestimmten MinMax-Wert durch die Ungarische Methode bestimmt wird, auch systematisch alternative (Pareto-)optimale Lösungen (falls existent) ebenfalls erzeugt und ausgegeben werden. Erst dann bekommt das Zusatzkriterium *Häufigkeitswert* Entscheidungsrelevanz. Die Möglichkeit der systematischen Ermittlung *aller* alternativen Lösungen durch vollständige Enumeration dürfte für konkrete Realprobleme noch effizient machbar sein, vom theoretischen Standpunkt aus handelt es sich bei Worst-Case-Betrachtungen um kein „gutes“ Verfahren, sodass heuristische Lösungsansätze in Frage kommen (z.B. effiziente Backtracking-Strategien). Die Fragestellung, inwieweit diese verfeinerte Entscheidungsunterstützung nicht nur in theoretischen, sondern insbesondere auch in Realfällen zum Tragen kommt, ist Gegenstand weitergehender Untersuchungen.

Literaturhinweise

Bamberg G, Bauer F, Krapp M: *Statistik* (16. Auflage). Oldenbourg, München-Wien 2012.
Bosch K: *Statistik-Taschenbuch* (3. Auflage). Oldenbourg, München-Wien 1998.
Burkard R, Dell'Amico M, Martello S: *Assignment Problems*. SIAM 2009.
Domschke W: *Logistik: Transport* (4. Auflage). Oldenbourg, München-Wien 1995.
Kuhn HW: *The Hungarian method for the the assignment problem*. Naval Res. Log. Quart. 2 (1955) 83-97.
Kuhn HW: *Variants of the Hungarian method for the the assignment problem*. Naval Res. Log. Quart. 3 (1956) 253-258.
Pundir PS, Porwal SK, Singh BP: *A new algorithm for solving linear bottleneck assignment problem*. Journal of Institute of Science and Technology, 2015, 20(2): 101-102, Tribhuvan University, India.
Steuer RE: *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*. New York: John Wiley, 1986.
Triantaphyllou E: *Multi-Criteria Decision Making: A Comparative Study*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2000.
Zimmermann H-J, Gutsche L: *Multi-Criteria Analyse - Einführung in die Theorie der Entscheidungen bei Mehrfachzielsetzungen*. Berlin-Heidelberg: Springer, 1991.

Die Autoren

Prof. Dr. rer. pol. Dipl. -Math. Hermann-Josef Kruse
Fachhochschule Bielefeld
Fachbereich Ingenieurwissenschaften und Mathematik
hermann-josef.kruse@fh-bielefeld.de

Fachgebiete: Wirtschaftsmathematik, Operations Research

Seit 1995 als Professor für Wirtschaftsmathematik (insbesondere Operations Research) an der Fachhochschule Bielefeld tätig und lehrt dort im Bachelor-Studiengang *Angewandte Mathematik* und im Master-Studiengang *Optimierung & Simulation* des Fachbereichs *Ingenieurwissenschaften & Mathematik*. Gründungsmitglied des Forschungsschwerpunktes *Angewandte Mathematische Modellierung & Optimierung* (FSP AMMO) der FH Bielefeld. F&E-Projekte im Bereich der Optimierung und Simulation diskreter Systeme zur Entscheidungsunterstützung bei betrieblichen Problemstellungen.

Prof. Dr. phil. Dipl. -Math. Bernhard Bachmann
Fachhochschule Bielefeld
Fachbereich Ingenieurwissenschaften und Mathematik
bernhard.bachmann@fh-bielefeld.de

Fachgebiete: Numerische Mathematik, Optimierung, Symbolische und numerische Behandlung großer hybrider differential-algebraischer Gleichungssysteme

Seit 1999 als Professor für Mathematik und ihre technischen Anwendungen an der Fachhochschule Bielefeld tätig und lehrt dort im Bachelor-Studiengang *Angewandte Mathematik* und im Master-Studiengang *Optimierung & Simulation* des Fachbereichs *Ingenieurwissenschaften & Mathematik*. Gründungsmitglied des Forschungsschwerpunktes *Angewandte Mathematische Modellierung & Optimierung* (FSP AMMO) der FH Bielefeld. Gründungsmitglied der *Modelica Association*. Gründungs- und Vorstandsmitglied des *Open Source Modelica Consortium* (OSMC). Nationale und internationale F&E-Projekte im Bereich der Modellierung, Simulation und Optimierung hybrider dynamischer Systeme.

Kontaktdaten

Autoren

Prof. Dr. Hermann-Josef Kruse
Fachhochschule Bielefeld
Fachbereich Ingenieurwissenschaften und Mathematik
Interaktion 1
33619 Bielefeld
Telefon +49.521.106-7411
hermann-josef.kruse@fh-bielefeld.de
Raum D 229

Prof. Dr. Bernhard Bachmann
Fachhochschule Bielefeld
Fachbereich Ingenieurwissenschaften und Mathematik
Interaktion 1
33619 Bielefeld
Telefon +49.521.106-7407
bernhard.bachmann@fh-bielefeld.de
Raum D 230

FSP AMMO

Sprecherin

Prof. Dr. rer. nat. Svetozara Petrova
Fachhochschule Bielefeld
Fachbereich Ingenieurwissenschaften und Mathematik
FSP Angewandte Mathematische Modellierung und Optimierung
Interaktion 1
33619 Bielefeld
Telefon +49.521.106-7410
svetozara.petrova@fh-bielefeld.de
Raum D 226

Stellv. Sprecher

Prof. Dr. rer. nat. Jörg Horst
Fachhochschule Bielefeld
Fachbereich Ingenieurwissenschaften und Mathematik
FSP Angewandte Mathematische Modellierung und Optimierung
Interaktion 1
33619 Bielefeld
Telefon +49.521.106-70538
joerg.horst@fh-bielefeld.de
Raum D 217

Veröffentlichungsreihe: AMMO – Berichte aus Forschung und Technologietransfer

Heft 10: K.K. Abdelhak, B. Bachmann, H.-J. Kruse: *Genetische Algorithmen zur Ermittlung von Hamiltonzyklen in Digraphen*. Juli 2018.

Heft 9: D. Nehab, T. Lask, H.-J. Kruse: *Programm zur Entscheidungsunterstützung für eine Klasse von WzP-Kommissionierungsproblemen*. März 2018.

Heft 8: J. Silberberg, T. Lask, B. Bachmann: *Formalismen für gefärbte Petri-Netze und Verfahren zur effizienten Bestimmung von aktiven Modus-Mengen*. Juli 2016.

Heft 7: T.F. Lye, H.-J. Kruse, T. Lask: *Heuristische Lösungsmethoden für eine Klasse von Ware-zum-Mensch-Kommissionierungsprobleme*. März 2016.

Heft 6: T. Kleine-Döpke, H.-J. Kruse: *Lösungsansätze für Konfliktsituationen bei Feuerprozessen in kapazitierten Petri-Netzen*. Juni 2015.

Heft 5: H.-J. Kruse: *Optimumgraphen*. Oktober 2014.

Heft 4: S. Proß: *Diskrete Modellierung und Optimierung praxisrelevanter Prozesse mit Petri-Netzen*. September 2014.

Heft 3: R. Ueckerdt, H.-W. Schmidt, M. Weber, E. Mindlina: *Entwicklung einer Dispatcherfunktion zur Überprüfung von Nominierungsmengen in der Betriebsführung von Erdgasspeichern*. Juli 2014.

Heft 2: R. Walden und V.-M. Roemer: *Methoden der quantitativen rechnergestützten CTG-Analyse*. April 2014.

Heft 1: AMMO-Team: *Informationen über den Forschungs- und Entwicklungsschwerpunkt Angewandte Mathematische Modellierung und Optimierung*. Dezember 2013.

ISSN 2198-4824
Herausgeber:
Vorstand von FSP AMMO
Fachhochschule Bielefeld