



**FH Bielefeld**  
University of  
Applied Sciences



*Angewandte Mathematische Modellierung & Optimierung*

**AMMO – Berichte aus Forschung und Technologietransfer**

# Optimumgraphen

Prof. Dr. rer. pol. Hermann-Josef Kruse

**Veröffentlichungsreihe (Onlinepublikation):**  
**AMMO – Berichte aus Forschung und Technologietransfer**

**ISSN**  
2198-4824

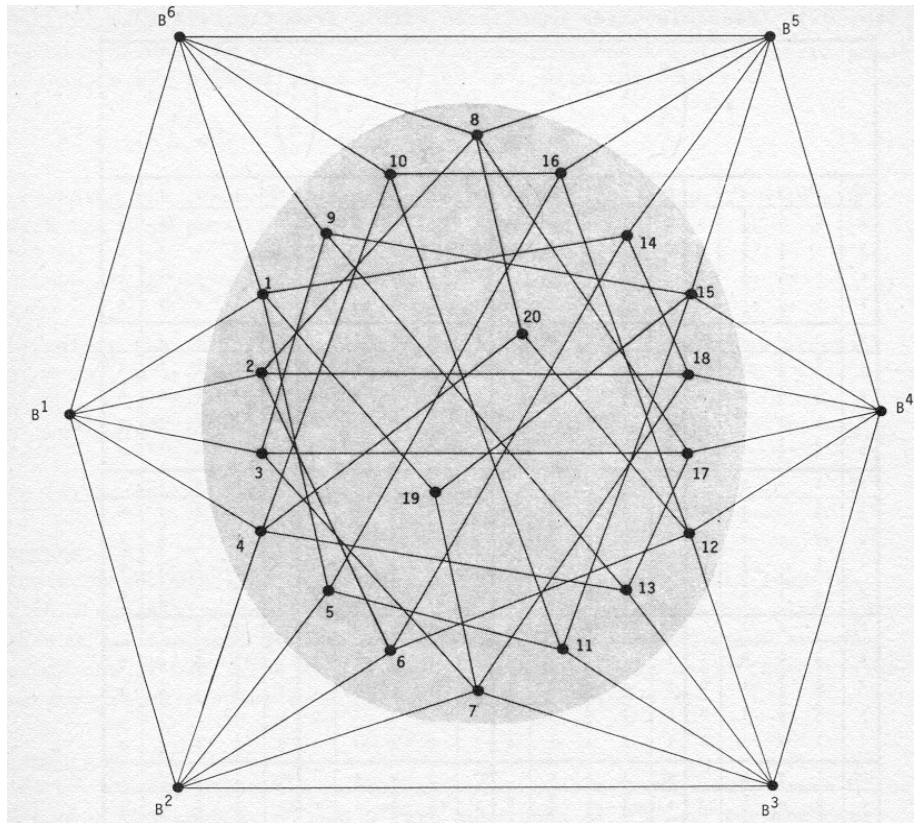
**Erscheinungsort**  
<http://www.fh-bielefeld.de/ammo/veroeffentlichungen/ammo-berichte-aus-forschung-und-technologietransfer>

**Herausgeber**  
Sprecher FSP AMMO, Fachhochschule Bielefeld

Fachhochschule Bielefeld  
Fachbereich Ingenieurwissenschaften und Mathematik  
FSP Angewandte Mathematische Modellierung und Optimierung  
Am Stadtholz 24  
33609 Bielefeld

# Optimumgraphen

**Hermann-Josef Kruse**  
Fachhochschule Bielefeld  
Fachbereich *Ingenieurwissenschaften & Mathematik*  
Studiengang *Angewandte Mathematik*



## Vorwort

Diese Abhandlung ist meinem Doktorvater Prof. Dr. Dr. Tomas Gal gewidmet. Er starb vor einem Jahr, genauer am 15. September 2013 in Baden-Baden, im Alter von 87 Jahren. Als wissenschaftlicher Mitarbeiter seines Lehrstuhls für Wirtschaftsmathematik und Operations Research an der FernUniversität Hagen habe ich viele Jahre (1979-1987) mit ihm zusammengearbeitet. Neben vielen anderen Gebieten der Mathematik, insbesondere des Operations Research, war das Thema Entartung in der mathematischen Optimierung sein wissenschaftliches „Steckenpferd“, welches wir eine Zeit lang teilten. Das durch ihn geweckte Interesse an diesem Spezialgebiet wurde zwischenzeitlich durch die Beschäftigung in anderen Bereichen der angewandten Mathematik zwar überlagert, ist aber nie völlig erloschen.

In memoriam Professor Gal

## Danksagung

Für das fleißige Korrekturlesen bedanke ich mich sehr herzlich bei meinem Mitarbeiter Timo Kleine-Döpke und bei meinem Sohn Sebastian.

September 2014

Hermann-Josef Kruse

## Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	1
2.	Grundlegende Begriffe	3
2.1.	Terminologie der linearen Optimierung	3
2.2.	Entartung	4
2.3.	Darstellungs- und Entartungsgraphen	5
2.4.	Optimumgraphen	8
3.	Eigenschaften von Optimumgraphen	9
4.	Sensitivitätsanalyse an Optimumgraphen	12
5.	Gesamtheiten von Optimumgraphen	21
5.1.	Gesamtheiten von Optimumgraphen im $\mathbb{R}^2$	22
5.2.	Gesamtheiten von Optimumgraphen im $\mathbb{R}^n$	29
6.	Ausblick	31

Literaturverzeichnis

Anhang

# 1. Einleitung

Bei allen mathematischen Optimierungsproblemen, bei denen die zulässigen Lösungen konvexe polyedrische Mengen bilden, spielt die Entartung<sup>1</sup> eine große Rolle, da sie fast immer Konvergenz- oder Effizienzprobleme hervorruft. Für die Vielzahl von Entartungsproblemen seien hier stellvertretend die folgenden genannt<sup>2</sup>:

- das Zykelproblem beim Simplexverfahren (als das „klassische“ Entartungsproblem)<sup>3</sup>,
- das Nachbarschaftsproblem<sup>4</sup>,
- das Problem der Interpretation und Bestimmung von Schattenpreisen bei Entartung.<sup>5</sup>

Zur grundlegenden Untersuchung der Entartung und insbesondere der Entartungsstrukturen von Polyedern hat sich ein graphentheoretischer Ansatz bewährt.<sup>6</sup> Hierbei wird eine konvexe polyedrische Menge in einen sog. *Darstellungsgraph*<sup>7</sup> überführt, wobei jeder entarteten Polyederecke auf kanonische Weise eindeutig ein Teilgraph des Darstellungsgraphen zugeordnet wird. Diese sog. *Entartungsgraphen*<sup>8</sup> enthalten alle relevanten Informationen über die Entartungsstruktur der jeweiligen Ecke. Die wesentlichen Ergebnisse der theoretischen Untersuchungen auf dem Gebiet der Entartungsgraphen findet man bei Gal (1985, 1990, 1993), Kruse (1986), Gal/Kruse/Zörnig (1986, 1988), Zörnig (1991, 1993).

In diesem Beitrag wird ein spezielles Entartungsproblem betrachtet, nämlich das Auftreten von entarteten Optima bei linearen Optimierungsproblemen. Aus der Tatsache, dass sämtliche zu einer entarteten Ecke gehörigen Basen (bzw. Simplextableaus) stets primale Zulässigkeit aufweisen müssen, in der Regel aber nicht alle Basen (bzw. Simplextableaus) auch dual zulässig und damit optimal sind, ergibt sich eine Sonderstellung für die (Teil-)Menge der optimalen Basen (bzw. optimalen Simplextableaus) einer entarteten Polyederecke. Der durch diese Teilmenge induzierte Teilgraph eines Entartungsgraphen, genannt *Optimumgraph*<sup>9</sup>, bildet im Folgenden den Untersuchungsgegenstand, wobei insbesondere die Abschnitte 4 und 5 einige neue Aspekte in der Theorie der Entartungs- und Optimumgraphen beleuchten.

In Abschnitt 2 werden die grundlegenden Begriffe aus der Theorie der Entartungsgraphen eingeführt, die Definition des Optimumgraphen aus dem Begriff des Entartungsgraphen heraus entwickelt und die eingeführten Begriffe anhand von Beispielen veranschaulicht.

---

<sup>1</sup> In dieser Abhandlung ist stets die *primale Entartung* gemeint, also die Überbestimmtheit der jeweils (primal) entarteten Polyederecke (Näheres hierzu siehe in Abschn. 2). Der Begriff der *dualen Entartung* wird nur insofern benutzt, als dadurch der Begriff der  $\sigma$ -dualen Entartung erklärt wird (siehe Abschn. 3).

<sup>2</sup> Vgl. Kruse (1986), Gal/Kruse/Zörnig (1988), Kruse (1993). Eine Übersicht über weitere Entartungsprobleme findet man bei Gal (1990).

<sup>3</sup> Hierzu siehe Charnes (1952), Hoffman (1953), Beale (1955), Dantzig/Orden/Wolfe (1955), Bland (1977), Zörnig (1991).

<sup>4</sup> Hierzu siehe Gal (1985), Gal/Kruse (1985), Kruse (1986), Geue (1993).

<sup>5</sup> Hierzu siehe Knolmayer (1976), Aucamp/Steinberg (1982), Evans/Baker (1982), Agkül (1984), Gal (1986), Greenberg (1986), Knolmayer (1984), Piehler/Kruse (1989), Piehler (1990), Knolmayer/Stuhr (1990), Knolmayer/Klöber (1992).

<sup>6</sup> Hierzu siehe Gal (1985, 1990, 1993), Kruse (1986), Zörnig (1991, 1993).

<sup>7</sup> In englischsprachigen Beiträgen wird dieser Begriff mit *representation graph* übersetzt.

<sup>8</sup> Im Englischen als *degeneracy graph* gebräuchlich.

<sup>9</sup> Dieser Begriff wurde von Kruse (1987) eingeführt. In englischsprachigen Beiträgen findet man zumeist den synonymen Begriff *optimum-degeneracy graph* oder *o-degeneracy graph*.

In Abschnitt 3 werden die in der Literatur bereits behandelten Fragestellungen und Untersuchungsergebnisse aus der Theorie der Optimumgraphen vorgestellt.

Abschnitt 4 befasst sich mit der Verallgemeinerung des Sensitivitätsbegriffs für Basislösungen von linearen Optimierungsproblemen auf Optimumgraphen. Zunächst werden Sensitivitätsintervalle für entartete Ecken definiert und Bereiche eingeführt, in denen sich Optimumgraphen invariant verhalten. Von besonderer Bedeutung stellen sich sog. Repräsentanten und minimale Informationsmengen für die Optimalität von entarteten Ecken heraus.

Abschnitt 5 macht konzeptionelle Aussagen über die Gesamtheiten von Optimumgraphen, welche im Wesentlichen durch sog. Optimalbasismengen beschrieben werden. Diese Betrachtungen werden allerdings im Wesentlichen auf den zu veranschaulichenden Bereich des  $\mathbb{R}^2$  eingeschränkt.

Abschließend wird darauf verwiesen, wie die wissenschaftliche Beschäftigung mit Optimumgraphen in die Lehre des Studienganges *Angewandte Mathematik* der Fachhochschule Bielefeld einbezogen wird.

## 2. Grundlegende Begriffe

### 2.1. Terminologie der linearen Optimierung

Im Folgenden wird stets ein lineares Optimierungsproblem (LOP) in der Ungleichungsform

$$(1) \quad \max_{\mathbf{x} \in X} z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \text{ mit Lösungsraum } X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m,$$

bzw. in der kanonischen Form mit dem Lösungsraum

$$(2) \quad \bar{X} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{I} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \right\}, (\mathbf{A} \mid \mathbf{I}) \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^m,$$

zugrunde gelegt, wobei  $\mathbf{x}$  der **Strukturvariablenvektor**,  $\mathbf{s}$  der **Schlupfvariablenvektor**,  $\mathbf{A}$  die **technologische Matrix** bzw.  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{I})$  die **erweiterte Matrix** und  $\mathbf{b}$  der **Vektor der rechten Seite** genannt werden, wobei  $\mathbf{I}$  die  $m \times m$ -Einheitsmatrix ist. Der Einfachheit halber werden die Strukturvariablen mit  $x_1, \dots, x_n$  und die Schlupfvariablen mit  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$  bezeichnet. Der Lösungsraum  $X$  stellt im Falle  $X \neq \emptyset$  eine konvexe polyedrische Punktmenge im  $\mathbb{R}^n$  und im Falle der Beschränktheit von  $X$  ein konvexes Polyeder dar.

In der Terminologie der linearen Optimierung wird jede reguläre  $m \times m$ -Teilmatrix  $\mathbf{B}$  der erweiterten Matrix  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{I})$  als eine **Basis** des LOP bezeichnet. Die zu einer Basis  $\mathbf{B}$  gehörigen Spaltenvektoren von  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{I})$  heißen **Basisspalten** und die zugehörigen Variablen **Basisvariablen** (bzgl.  $\mathbf{B}$ ); entsprechend heißen die übrigen Spaltenvektoren von  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{I})$  **Nichtbasisspalten** bzw. die zugehörigen Variablen **Nichtbasisvariablen** (bzgl.  $\mathbf{B}$ ). Durch Pivotieren (mittels Gauß-Eliminationsverfahren) kann jeder Basis  $\mathbf{B}$  umkehrbar eindeutig ein sog. **Simplextableau** zugeordnet werden, welches in den Basisspalten Einheitsvektoren enthält und in der folgenden Form geschrieben werden kann:

**Tab. 1:** Allgemeine Form eines Simplextableaus

BV	Strukturvariable			Schlupfvariable			$\mathbf{x}_B$
	$x_1$	...	$x_n$	$x_{n+1}$	...	$x_{n+m}$	
$x_{k_1}$	$y_{11}$	...	$y_{1n}$	$y_{1,n+1}$	...	$y_{1,n+m}$	$y_1$
.	.		.	.		.	.
.	.	$\ddots$	.	.	$\ddots$	.	.
.	.		.	.		.	.
$x_{k_m}$	$y_{m1}$	...	$y_{mn}$	$y_{m,n+1}$	...	$y_{m,n+m}$	$y_m$
$\Delta z_j$	$\Delta z_1$	...	$\Delta z_n$	$\Delta z_{n+1}$	...	$\Delta z_{n+m}$	$z$

Legende:  $y_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $y_i \in \mathbb{R}$ ,  $\Delta z_j \in \mathbb{R}$  für  $i=1, \dots, m$ ,  $j=1, \dots, n+m$ ;  $z \in \mathbb{R}$ ;  
 $\{k_1, \dots, k_m\} \subset \{1, \dots, n+m\}$ .

Die erste Tableauspalte enthält den **Basisvariablenvektor** (BV) mit den Basisvariablen  $x_{k_i}$  bzw. den Basisindizes  $k_i$  für  $i=1, \dots, m$ , die letzte Spalte die **Basislösung** (bzgl. **B**). Die untere Zeile wird auch die **Kriteriumsreihe** des Simplextableaus genannt; sie enthält die sog. **dualen Werte**  $\Delta z_j$  der Lösung zur Basis **B** ( $j=1, \dots, n+m$ ) sowie den zugehörigen **Zielfunktionswert**  $z$ .

Falls die Werte der Basislösung nichtnegativ sind (d.h.  $y_i \geq 0$  für  $i=1, \dots, m$ ), heißt die Basislösung  $\mathbf{x}_B$  (bzw. die Basis **B** bzw. das zugehörige Simplextableau) **primal zulässig**. Eine primal zulässige Basis(-lösung) entspricht einer Ecke des Lösungsraumes  $X$ . Falls die dualen Werte in der Kriteriumsreihe nichtnegativ sind (d.h.  $\Delta z_j \geq 0$  für  $j=1, \dots, n+m$ ), heißt die Basislösung  $\mathbf{x}_B$  (bzw. die Basis **B** bzw. das zugehörige Simplextableau) **dual zulässig**. Eine Basislösung (bzw. Basis bzw. das zugehörige Simplextableau) ist genau dann **optimal**, also eine Lösung des LOP, wenn sie primal und dual zulässig ist. Das bekannte **Simplexverfahren** zur Lösung von LOP ist ein Eckenabsuchverfahren; es startet anhand eines Simplextableaus einer primal zulässigen Basis(-lösung) und wechselt in jedem Pivotschritt (auch *Basistausch* genannt) zu einer anderen primal zulässigen Basis, wobei das sog. *Optimalitäts-* oder *Aufnahmekriterium* darauf achtet, dass sich der Zielfunktionswert pro Pivotschritt verbessert (genauer gesagt: nicht verschlechtert), und durch das sog. *Zulässigkeits-* oder *Eliminationskriterium* dafür Sorge getragen wird, dass die neue Basis(-lösung) ebenfalls primal zulässig ist. Das Simplexverfahren endet bei einem optimalen Simplextableau (falls existent) bzw. in der zugehörigen **optimalen Ecke** von  $X$ .

## 2.2. Entartung

Eine primal zulässige Basislösung  $\mathbf{x}_B$  (bzw. die Basis **B** bzw. das zugehörige Simplextableau) heißt (**primal**) **entartet**, wenn mindestens eine Komponente den Wert Null annimmt, d.h.  $y_i = 0$  für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Die Anzahl der Nullkomponenten von  $\mathbf{x}_B$  wird der **Entartungsgrad** genannt und mit  $\sigma$  bezeichnet. Die zugehörige Ecke  $\mathbf{x}^0$  von  $X$  heißt dann **entartet vom Grade  $\sigma$**  oder kurz  **$\sigma$ -entartet**. Eine nicht-entartete Ecke besitzt also den Entartungsgrad  $\sigma=0$ .

Die Entartung einer Polyederecke wird dadurch ausgelöst, dass diese Ecke „überbestimmt“ ist, d.h. dass sich mehr als  $n$  Restriktionshyperebenen in dieser Ecke schneiden. Die durch Entartung hervorgerufenen Folgeerscheinungen (Konvergenz- und Effizienzprobleme) ergeben sich aus den Basen-Ecken-Beziehungen. Im Nichtentartungsfall ist jeder Ecke von  $X$  umkehrbar eindeutig eine Basis (bzw. Basislösung bzw. Simplextableau) zugeordnet. Im Entartungsfall besitzt die Ecke aber eine Vielzahl von Basen (Basislösungen, Simplextableaus).

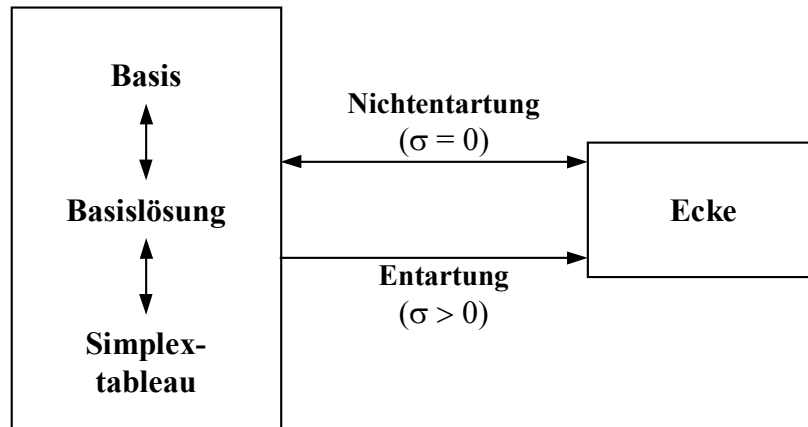


Abb. 1: Basen-Ecken-Beziehung im (Nicht-)Entartungsfall

Die Anzahl der Basen, die zu einer  $\sigma$ -entarteten Ecke  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$  gehört, wird die **Entartungszahl** von  $\mathbf{x}^0$  genannt und mit  $U=U(\mathbf{x}^0)$  bezeichnet. Die Menge aller zur Ecke  $\mathbf{x}^0$  gehörigen Basen heißt die **Basenmenge** von  $\mathbf{x}^0$ ; sie wird mit

$$(3) \quad B^0 = \{B_u \mid u=1, \dots, U\}$$

bezeichnet. Die Entartungszahl  $U$  einer  $\sigma$ -entarteten Ecke  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$  lässt sich nach oben und unten abschätzen:

$$(4) \quad U_{\min} = 2^{\sigma-1} \cdot (n - \sigma + 2) \leq U \leq \binom{n + \sigma}{\sigma} = U_{\max}.$$

Es kann gezeigt werden, dass es sich bei  $U_{\min}$  und  $U_{\max}$  um scharfe Schranken handelt, denn sie können von  $U$  für beliebige Größen  $n, \sigma \in \mathbb{N}$  exakt angenommen werden, d.h.  $U=U_{\min}$  und  $U=U_{\max}$  ist jeweils möglich (vgl. Kruse (1986)). Welchen Wert die Entartungszahl  $U$  innerhalb des diskreten Bereiches zwischen  $U_{\min}$  und  $U_{\max}$  im Einzelfall annimmt, hängt im Wesentlichen von der technologischen Matrix  $\mathbf{A}$  ab, genauer gesagt von der Besetzungsdichte von  $\mathbf{A}$  und von den linearen (Un-)Abhängigkeiten ihrer Spaltenvektoren zueinander. Da in praktischen Fällen die Matrix  $\mathbf{A}$  zumeist nur dünn besetzt ist, liegt die Entartungszahl  $U$  oft näher bei  $U_{\min}$ . Aber auch dann kann bei hohem Entartungsgrad  $\sigma$  die Anzahl verschiedener Basen, die zu ein und derselben  $\sigma$ -entarteten Ecke gehören, überaus groß werden (vgl. Kruse (1986; S. 51)).

### 2.3. Darstellungs- und Entartungsgraphen

Um die Entartung einer Polyederecke und die damit verbundenen Schwierigkeiten genauer untersuchen und ihre „Entartungsstruktur“ präziser beschreiben und veranschaulichen zu können, wurde der folgende graphentheoretische Ansatz gewählt (vgl. Gal (1985), Kruse (1986)):

Jeder primal zulässigen Basis  $B$  eines LOP wird ein Knoten zugewiesen. Falls es möglich ist, zwischen zwei Basen  $B$  und  $B^*$  einen Basentausch vorzunehmen, d.h. das zu  $B$  gehörige Simplextableau durch genau einen Pivotschritt in das Simplextableau von  $B^*$  überführen zu können (und umgekehrt), werden die Knoten von  $B$  und  $B^*$  durch eine Kante verbunden. Die Basen  $B$  und  $B^*$  werden dann auch als **benachbarte Basen** bezeichnet; in Zeichen:  $B \leftrightarrow B^*$ . Der sich daraus ergebende Graph  $G = G(X)$  heißt der **Darstellungsgraph** von  $X$ , genauer:

$$(5) \quad G = (V, E) \text{ mit } V = \{B \mid B \text{ ist primal zulässige Basis von (1)}\} \text{ und } E = \{\{B, B^*\} \subset V \mid B \leftrightarrow B^*\}.$$



Man beachte, dass die Zielfunktion von (1) keinen Einfluss auf den Darstellungsgraph  $G$  ausübt. Vielmehr ist  $G$  ausschließlich eine Beschreibungsform des Lösungsraumes  $X$ , welche als eine Projektion der Polyederecken von  $X$  und der sie verbindenden Kanten in die Ebene gedeutet werden kann.

Im Nichtentartungsfall ist jeder Ecke von  $X$  genau ein Knoten in  $G$  zugewiesen. Falls  $\mathbf{x}^0$  eine  $\sigma$ -entartete Ecke von  $X$  und  $B^0$  die zugehörige Basenmenge ist, gehören  $U$  Knoten in  $G$  zu  $\mathbf{x}^0$ . Auf kanonische Weise wird also durch  $B^0 \subset V$  ein Teilgraph  $G^0$  von  $G$  induziert:

$$(6) \quad G^0 = (B^0, E^0) \text{ mit } E^0 = \{ \{B_u, B_v\} \subset B^0 \mid B_u \leftrightarrow B_v \}.$$

Dieser Teilgraph wird der **Entartungsgraph** von  $\mathbf{x}^0$  genannt und mit  $G^0 = G(\mathbf{x}^0)$  bezeichnet.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass man in der Theorie der Entartungsgraphen zwischen drei Ausprägungen eines Entartungsgraphen unterscheidet (vgl. Kruse (1986; S. 15)). Dabei unterscheidet man die Nachbarschaft zwischen den Basen von  $\mathbf{x}^0$  dahingehend, ob der jeweilige Basentausch  $B_u \leftrightarrow B_v$  mit einem positiven oder einem negativen Pivotelement vorgenommen wird.<sup>10</sup> Dementsprechend wird auch die Symbolik erweitert:  $B_u \overset{+}{\leftrightarrow} B_v$  bzw.  $B_u \overset{-}{\leftrightarrow} B_v$ , so dass  $B_u \leftrightarrow B_v$  der Konjunktion  $B_u \overset{+}{\leftrightarrow} B_v \vee B_u \overset{-}{\leftrightarrow} B_v$  entspricht. Damit lässt sich der Begriff des Entartungsgraphen folgendermaßen spezifizieren:

Es sei eine  $\sigma$ -entartete Ecke  $\mathbf{x}^0$  einer konvexen polyedrischen Menge  $X \subset \mathbb{R}^n$  mit der zugehörigen Basenmenge  $B^0$  gegeben, dann heißt

$$(7) \quad G_+^0 = G^+(\mathbf{x}^0) = (B^0, E_+^0) \text{ mit } E_+^0 = \{ \{B_u, B_v\} \subset B^0 \mid B_u \overset{+}{\leftrightarrow} B_v \}$$

der **positive Entartungsgraph** von  $\mathbf{x}^0$  und

$$(8) \quad G_-^0 = G^-(\mathbf{x}^0) = (B^0, E_-^0) \text{ mit } E_-^0 = \{ \{B_u, B_v\} \subset B^0 \mid B_u \overset{-}{\leftrightarrow} B_v \}$$

der **negative Entartungsgraph** von  $\mathbf{x}^0$ . In diesem Zusammenhang wird der in (6) definierte Graph  $G^0 = G(\mathbf{x}^0)$  der **allgemeine Entartungsgraph** von  $\mathbf{x}^0$  genannt.

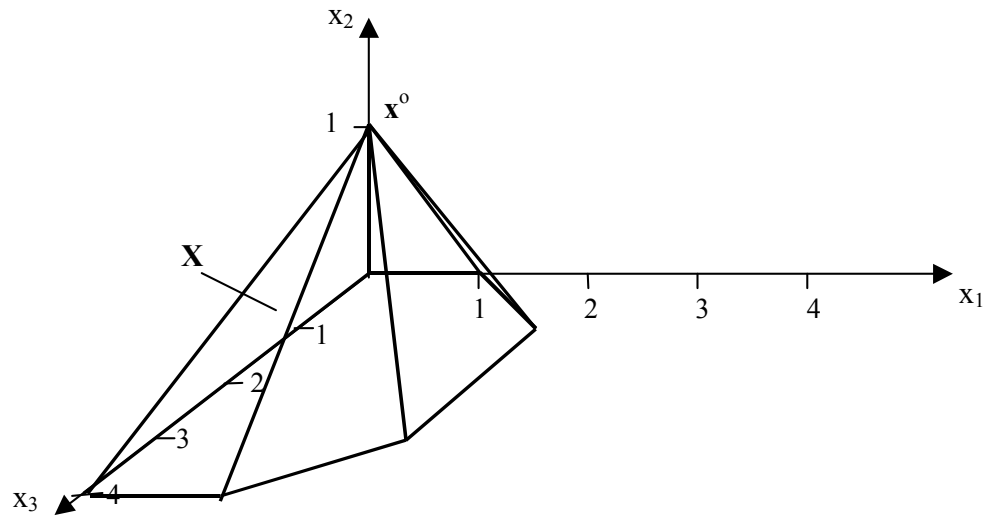
Zur Veranschaulichung der eingeführten Begriffe soll das folgende Beispiel dienen (vgl. Kruse (1986; S. 9ff)):

### **Beispiel 1:**

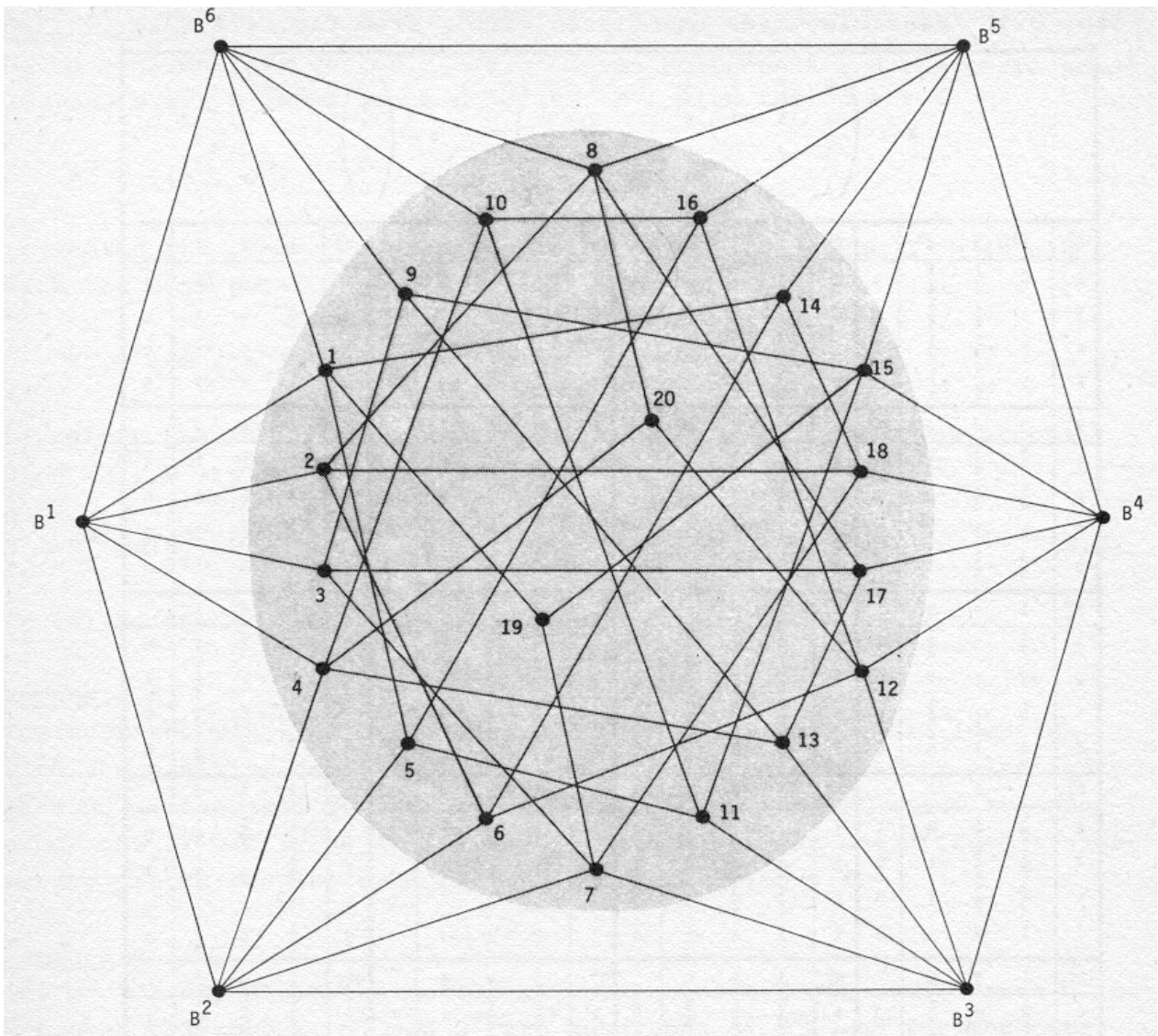
Durch das folgende lineare Ungleichungssystem wird das konvexe Polyeder  $X \subset \mathbb{R}^3$  definiert, welches in Abb. 2 dargestellt ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

<sup>10</sup> Man beachte, dass Basentausche zwischen Basen, die zu verschiedenen Ecken einer konvexen polyedrischen Menge gehören, aufgrund des Zulässigkeitskriteriums immer nur mit positiven Pivotelementen durchgeführt werden können. Zwischen Basen einer entarteten Ecke sind allerdings auch Basentausche mit negativen Pivotelementen zugelassen und sinnvoll.



**Abb. 2:** Konvexes Polyeder  $X \subset \mathbb{R}^3$  mit 3-entarteter Ecke  $x^0$



Legende: Knoten  $B^k \equiv$  Basis zur nichtentarteten Ecke  $x^k, k=1, \dots, 6$ ;  
 Knoten  $u \equiv$  Basisindex der Basis  $B_u \in B^0$  zur 3-entarteten Ecke  $x^0, u=1, \dots, 20$ ;

**Abb. 3:** Darstellungsgraph  $G(X)$  mit positivem Entartungsgraph der 3-entarteten Ecke  $x^0$

Der zugehörige Darstellungsgraph von  $X$  ist in Abb. 3 dargestellt. Er beinhaltet den positiven Entartungsgraph  $G_+^0$  der 3-entarteten Ecke  $\mathbf{x}^0 = (0; 1; 0)^T$  mit ihren Basen  $B_1, \dots, B_{20}$  ( $U=20$ ), deren zugehörige Pivottableaus<sup>11</sup> im Anhang 1 aufgelistet sind. Die Darstellungen des allgemeinen, positiven und negativen Entartungsgraphen von  $\mathbf{x}^0$  befinden sich im Anhang 2.

Man beachte, dass Entartungsgraphen die „Entartungsstruktur“ von Polyederecken beschreiben; Zielfunktionen bleiben bei diesen Untersuchungen – wie bereits für Darstellungsgraphen festgestellt – vollkommen außer Acht. Ausführliche Untersuchungsergebnisse über die Struktureigenschaften von Entartungsgraphen findet man u.a. bei Kruse (1986), Gal/Kruse/Zörnig (1986, 1988), Zörnig (1991, 1993).

## 2.4. Optimumgraphen

Im Folgenden wird weiterhin ein LOP in der Form (1) betrachtet, wobei allerdings auch die Zielfunktion mit in die Betrachtungen einbezogen wird. Falls das LOP eine (endliche) Lösung besitzt, wird dieses Optimum bekanntlich in einer Ecke  $\mathbf{x}^0$  des Lösungsraumes  $X$  angenommen. Das Simplexverfahren erkennt das Erreichen einer optimalen Ecke im Nichtentartungsfall daran, dass das zugehörige Simplextableau primale und duale Zulässigkeit aufweist. Falls die optimale Ecke  $\mathbf{x}^0$  jedoch entartet ist, tritt der komplizierte Sachverhalt ein, dass in der Regel nicht alle Simplextableaus, welche zur  $\sigma$ -entarteten optimalen Ecke  $\mathbf{x}^0$  gehören, dual zulässig sind. Somit wird die Basenmenge  $B^0 = \{B_1, \dots, B_U\}$  von  $\mathbf{x}^0$  auf kanonische Weise und in Abhängigkeit von der konkreten Zielfunktion  $z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}$  in zwei Teilmengen zerlegt, und zwar in die Menge der Basen von  $\mathbf{x}^0$ , die bzgl. der Zielfunktion dual zulässig und somit optimal sind, und in die Menge der Basen von  $\mathbf{x}^0$ , die bzgl. der Zielfunktion dual unzulässig sind, also in

$$(9) \quad B_c^0 = \{B_u \in B^0 \mid B_u \text{ ist dual zulässig bzgl. } \mathbf{c}\} \quad \text{bzw.} \quad B^0 \setminus B_c^0.$$

Die Menge  $B_c^0$  wird die **Optimalbasenmenge** von  $\mathbf{x}^0$  (bzgl.  $\mathbf{c}$ ) genannt<sup>12</sup>. Die Ecke  $\mathbf{x}^0$  ist genau dann optimal (bzgl.  $\mathbf{c}$ ), wenn  $B_c^0 \neq \emptyset$  gilt, also mindestens eine Basis von  $\mathbf{x}^0$  dual zulässig ist. Die Mächtigkeit der Optimalbasenmenge  $B_c^0$  wird mit  $U_c$  bezeichnet.

Im Folgenden wird angenommen, dass die Optimalbasenmenge  $B_c^0$  nicht leer und die  $\sigma$ -entartete Ecke  $\mathbf{x}^0$  somit optimal ist. Dann werden durch  $B_c^0$  folgende Teilgraphen der Entartungsgraphen von  $\mathbf{x}^0$  induziert:

$$(10) \quad O_c^+ = O_c^+(\mathbf{x}^0) = (B_c^0, E_+^0) \quad \text{mit} \quad E_+^0 = \{\{B_u, B_v\} \subset B_c^0 \mid B_u \overset{+}{\leftrightarrow} B_v\}$$

heißt **positiver Optimumgraph** von  $\mathbf{x}^0$  (bzgl.  $\mathbf{c}$ );

$$(11) \quad O_c^- = O_c^-(\mathbf{x}^0) = (B_c^0, E_-^0) \quad \text{mit} \quad E_-^0 = \{\{B_u, B_v\} \subset B_c^0 \mid B_u \overset{-}{\leftrightarrow} B_v\}$$

heißt **negativer Optimumgraph** von  $\mathbf{x}^0$  (bzgl.  $\mathbf{c}$ );

$$(12) \quad O_c = O_c(\mathbf{x}^0) = (B_c^0, E^0) \quad \text{mit} \quad E^0 = \{\{B_u, B_v\} \subset B_c^0 \mid B_u \leftrightarrow B_v\}$$

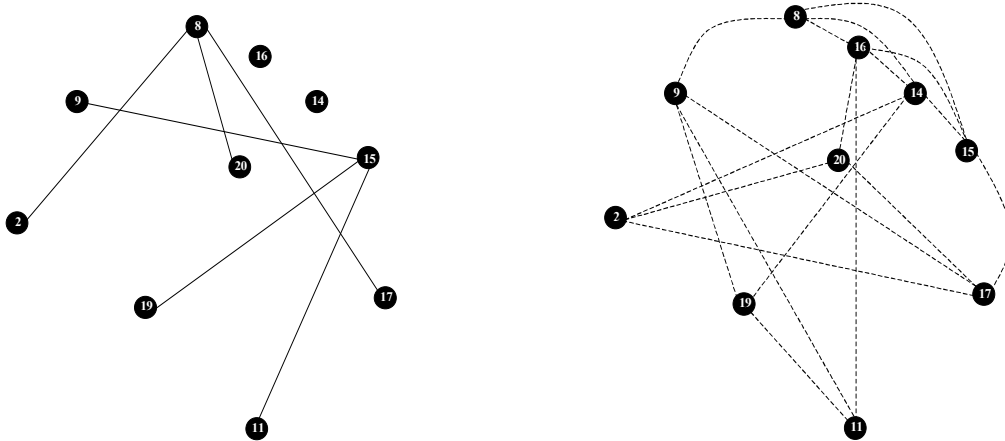
heißt **allgemeiner Optimumgraph** von  $\mathbf{x}^0$  (bzgl.  $\mathbf{c}$ ).

<sup>11</sup> Unter einem Pivottableau versteht man ein Simplextableau ohne Kriteriumszeile; vgl. Kruse (1986).

<sup>12</sup> Jede lineare Zielfunktion wird eindeutig durch seinen Zielkoeffizientenvektor  $\mathbf{c}$  bestimmt.

### Beispiel 2:

Zum linearen Ungleichungssystem aus Beispiel 1 werde die Zielfunktion  $z = 2 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3$  hinzugefügt. Das Optimum des LOP wird in der 3-entarteten Ecke  $\mathbf{x}^0 = (0; 1; 0)^T$  angenommen. Von den 20 Basen der Basenmenge  $B^0$  von  $\mathbf{x}^0$  sind 10 Basen bzgl.  $\mathbf{c} = (2; 20; 4)^T$  optimal, d.h.  $U_c = 10$  (vgl. die zugehörigen Simplextableaus im Anhang 3). Somit ergeben sich die folgenden Optimumgraphen von  $\mathbf{x}^0$  bzgl.  $\mathbf{c}$ :



**Abb. 4:** Positiver und negativer Optimumgraph<sup>13</sup> von  $\mathbf{x}^0$  bzgl.  $\mathbf{c}$

Für verschiedene Zielkoeffizientenvektoren  $\mathbf{c}$  ergeben sich sehr unterschiedlich strukturierte (positive bzw. negative) Optimumgraphen zu ein und derselben  $\sigma$ -entarteten Ecke  $\mathbf{x}^0$ . Anschauliche Beispiele hierzu befinden sich im Anhang 4. Insbesondere ändern sich die Mächtigkeit der jeweiligen Optimalbasenmengen sowie die Anzahl der Zusammenhangskomponenten bei den positiven Optimumgraphen, während die negativen Optimumgraphen stets zusammenhängend sind. Ergebnisse von diesbezüglichen Strukturuntersuchungen an Optimumgraphen sind in Abschnitt 3 zusammengefasst.

### 3. Eigenschaften von Optimumgraphen

Aus den betrachteten Beispielen<sup>14</sup> ergeben sich verschiedene Fragestellungen:

1. Fragen zur Knotenanzahl  $U_c$  von Optimumgraphen:

- Gibt es den Fall, dass *alle* Basen einer entarteten Polyederecke  $\mathbf{x}^0$  optimal sind?
- Ist der obige Fall sogar in dem Sinne allgemein gültig, dass es zu jedem konvexen Polyeder  $X$  mit einer entarteten Ecke  $\mathbf{x}^0$  eine Zielfunktion gibt, so dass *alle* Basen von  $\mathbf{x}^0$  optimal sind?
- Gibt es umgekehrt den Fall, dass *genau eine* Basis einer entarteten Polyederecke  $\mathbf{x}^0$  optimal ist?
- Ist dieser zweite Fall wiederum allgemein gültig, dass es also zu jedem konvexen Polyeder  $X$  mit einer entarteten Ecke  $\mathbf{x}^0$  eine Zielfunktion gibt, so dass *genau eine* Basis einer entarteten Polyederecke  $\mathbf{x}^0$  optimal ist?

<sup>13</sup> Der allgemeine Optimumgraph ergibt sich durch Zusammenlegung aller Kanten vom positiven und negativen Optimumgraph.

<sup>14</sup> Hierzu siehe insbesondere auch Anhang 4.

2. Fragen zu den Zusammenhangseigenschaften von Optimumgraphen<sup>15</sup>:

- Sind positive Optimumgraphen stets nicht zusammenhängend?
- Unter welchen Voraussetzungen sind positive Optimumgraphen trivial (d.h. jede Zusammenhangskomponente besteht aus nur einem Knoten)?
- Sind negative Optimumgraphen stets zusammenhängend?

Die Fragen zur Knotenanzahl von Optimumgraphen bzw. zur Mächtigkeit der Optimalbasenmengen  $B_c^0$  einer entarteten Ecke  $\mathbf{x}^0$  in einem LOP können wie folgt beantwortet werden (vgl. Kruse (1987, 1993)):

Im Fall  $\mathbf{c}=\mathbf{0}$  gilt stets:  $B^0 = B_c^0$ , d.h. sämtliche Basen von  $\mathbf{x}^0$  sind optimal (bzgl.  $\mathbf{c}=\mathbf{0}$ ). Dieser Fall hat allerdings nur eine theoretische Bedeutung im Zusammenhang mit der Untersuchung von Gesamtheiten von Optimumgraphen (vgl. Abschn. 5), ist jedoch praktisch uninteressant, so dass bis auf weiteres  $\mathbf{c}\neq\mathbf{0}$  vorausgesetzt wird.

Es gibt aber auch Fälle für  $\mathbf{c}\neq\mathbf{0}$ , so dass alle Basen einer entarteten Polyederecke  $\mathbf{x}^0$  optimal sind. Beispielsweise trifft dies zu für ein LOP der Form (1) mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{c} = (c_1, 0, 0)^T \text{ mit } c_1 > 0.$$

Für die Ecke  $\mathbf{x}^0 = (1, 0, 0)^T$  mit Entartungsgrad  $\sigma=1$  und Entartungszahl  $U=4$  gilt:  $B^0 = B_c^0$  bzw.  $U_c=U$  bzgl.  $\mathbf{c} = (c_1, 0, 0)^T$  mit  $c_1 > 0$ . Dieser Sachverhalt muss allerdings dahingehend relativiert werden, dass er bislang immer nur für recht „triviale“ Fälle ( $\sigma=1$ ,  $U=U_{\min}$ ) nachgewiesen werden konnte. Im Allgemeinen (insbesondere für  $\sigma>1$ ,  $U>U_{\min}$ ) gilt vielmehr der „Normalfall“  $B_c^0 \subset B^0$  bzw.  $U_c < U$ . Es kann sogar gezeigt werden, dass es Tripel  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{x}^0)$  gibt, zu dem explizit kein Zielkoeffizientenvektor  $\mathbf{c}\neq\mathbf{0}$  existiert, so dass alle Basen von  $\mathbf{x}^0$  optimal sind.<sup>16</sup>

Ebenso sind bisher nur „triviale“ Fälle bekannt, bei denen  $U_c=1$  gilt, d.h. nur genau eine Basis einer entarteten Polyederecke  $\mathbf{x}^0$  optimal ist.<sup>17</sup> Dass diese Fälle in der Tat Ausnahmefälle sind, ergibt sich anhand von Strukturuntersuchungen an Entartungsgraphen, denn es kann gezeigt werden, dass als notwendige Bedingung der negative Entartungsgraph von  $\mathbf{x}^0$  isolierte Knoten besitzen muss, was es nur in „notorischen Ausnahmefällen“ geben kann.<sup>18</sup> Somit ist es der „Normalfall“, dass  $U_c > 1$  gilt.

Aufgrund dieser Tatsache ergeben sich verschiedene Entartungsprobleme. Es stellt sich beispielsweise die Frage nach einem sinnvollen Sensitivitätsintervall für die Optimalität von  $\mathbf{x}^0$  bei Änderungen der Zielkoeffizienten im Rahmen einer (einparametrischen) Sensitivitätsanalyse. Zudem stellt sich das Problem der ökonomischen Interpretation und rechnerischen Bestimmung der dualen Werte als Schattenpreise bzw. Opportunitätskosten. Beide Fragen sind im Nichtentartungsfall anhand des jeweiligen (einigen) Simplextableaus eindeutig zu

<sup>15</sup> Allgemeine Optimumgraphen sind bewiesenermaßen stets zusammenhängend; siehe Zörnig/Gal (1996).

<sup>16</sup> Siehe Kruse (1987; S. 6), Kruse (1993; S. 400).

<sup>17</sup> Ein explizites Beispiel findet man bei Kruse (1987; S. 6f), Kruse (1993; S. 400).

<sup>18</sup> Der Sachverhalt, dass negative Entartungsgraphen in der Regel zusammenhängend ist, wird in Kruse (1986) gezeigt; er lässt sich darüber hinaus auch aus der nachgewiesenen Tatsache herleiten, dass im Entartungsfall mehrwertige Schattenpreise existieren; vgl. Abschn. 4 sowie Knolmayer (1984), Gal (1986).

beantworten. Im Abschnitt 4 werden diese Fragestellungen für den Entartungsfall näher behandelt.

Die Fragen nach den Zusammenhangseigenschaften von Optimumgraphen sollen zunächst für positive Optimumgraphen behandelt und beantwortet werden. Hierzu muss auf die Begriffe der *dualen* und  $\sigma$ -*dualen Entartung* zurückgegriffen werden:

Eine Basislösung  $\mathbf{x}_B$  (bzw. die Basis  $\mathbf{B}$ ) heißt *dual entartet*, wenn die Kriteriumszeile des zugehörigen Simplextableaus in mindestens einer Nichtbasisspalte den Wert Null aufweist, d.h.  $\Delta z_j = 0$  für mindestens eine Nichtbasisvariable  $x_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n+m\}$ . Eine (primal) entartete Basislösung  $\mathbf{x}_B$  (bzw. die Basis  $\mathbf{B}$ ) heißt  $\sigma$ -*dual entartet*, wenn das zugehörige Simplextableau (vgl. Tab. 1) eine primal entartete Zeile  $r$  (d.h.  $y_r = 0$ ) und eine dual entartete Nichtbasisspalte  $s$  (d.h.  $\Delta z_s = 0$ ) besitzt derart, dass  $y_{rs} > 0$  gilt.

Mit Hilfe des Begriffs der  $\sigma$ -dualen Entartung ergeben sich die folgenden Aussagen über Zusammenhangseigenschaften von positiven Optimumgraphen:

Zwei Basen  $B_u, B_v$  aus der Optimalbasenmenge  $B_c^0$  einer entarteten Ecke  $\mathbf{x}^0$ , welche im positiven Entartungsgraphen benachbart sind (d.h.  $B_u \overset{+}{\leftrightarrow} B_v$ ), sind  $\sigma$ -dual entartet. Aus dieser notwendigen Bedingung lässt sich umgekehrt schließen, dass unter Ausschluss von  $\sigma$ -dualer Entartung positive Optimumgraphen triviale Graphen sind, d.h. nur aus isolierten Knoten bestehen. Unter der berechtigten Annahme, dass das Auftreten von  $\sigma$ -dualer Entartung eher der Ausnahmefall ist<sup>19</sup>, muss geschlossen werden, dass der positive Optimumgraph im „Normalfall“ ein trivialer Graph ist. Dieser Sachverhalt wird in Abschnitt 5 bei der Untersuchung von Gesamtheiten von Optimumgraphen bestätigt, indem die nicht trivialen Optimumgraphen als „Übergangsfälle“ in Erscheinung treten. Allerdings kann stets auch der Fall konstruiert werden, und zwar für beliebige Größen  $n, \sigma \in \mathbb{N}$ , dass ein positiver Optimumgraph zusammenhängend sein kann, natürlich nur unter Hinzunahme der  $\sigma$ -dualen Entartung.<sup>20</sup>

Die Behandlung von Optimumgraphen an zahlreichen Beispielen hat gezeigt, dass es wiederum der „Normalfall“ ist, dass negative Optimumgraphen zusammenhängende Graphen sind. Dennoch lassen sich Gegenbeispiele konstruieren. So besitzt beispielsweise ein LOP der Form (1) mit

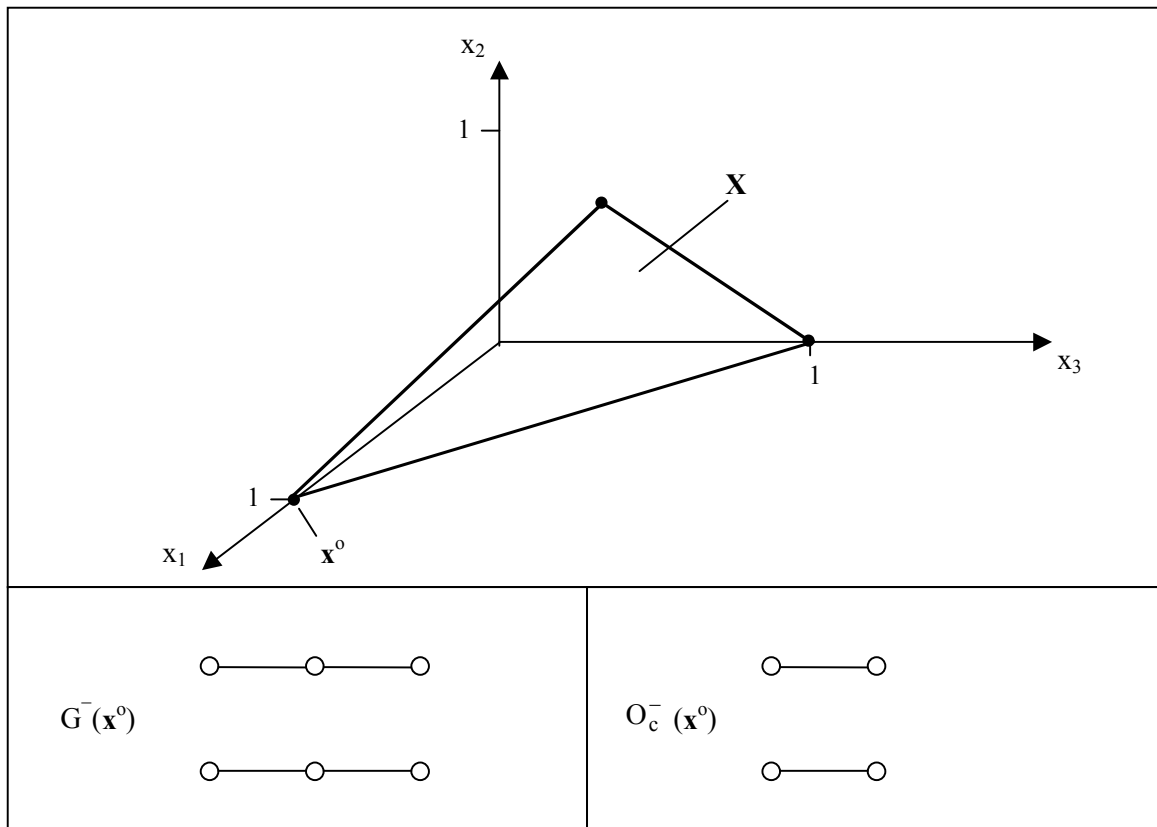
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } c_2 < 0$$

die 2-entartete Ecke  $\mathbf{x}^0 = (1, 0, 0)^T$  mit Entartungszahl  $U=6$ . Der zugehörige negative Optimumgraph ist nicht zusammenhängend, sondern besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten. Weitere Betrachtungen dieses Gegenbeispiels lassen erkennen (siehe Abb. 5)<sup>21</sup>, dass es sich hierbei insofern um ein konstruiertes Beispiel handelt, als der Lösungsraum  $X$  unterdimensioniert ist, d.h. dass  $X$  die Dimension 2 besitzt, während das LOP im  $\mathbb{R}^3$  „stattfindet“. Ebenso lässt sich feststellen, dass auch der negative Entartungsgraph von  $\mathbf{x}^0$  nicht zusammenhängend ist.

<sup>19</sup> Selbst die „doppelte Entartung“ eines Simplextableaus, d.h. die gleichzeitige primale und duale Entartung, wovon die  $\sigma$ -dualer Entartung wiederum einen Spezialfall darstellt, dürfte als Ausnahmefall angesehen werden.

<sup>20</sup> Die Beweise zu den Aussagen findet man bei Kruse (1987; S. 9f), Kruse (1993; S. 403f).

<sup>21</sup> Vgl. Kruse (1987; S. 11), Kruse (1993; S. 405f).



**Abb. 5:** Gegenbeispiel für einen nicht zusammenhängenden, negativen Optimumgraph

Es ist nach wie vor eine offene Frage, unter welchen Voraussetzungen sich der Fall, dass ein negativer Optimumgraph nicht zusammenhängend ist, konstruieren lässt.

#### 4. Sensitivitätsanalyse an Optimumgraphen

Eine Sensitivitätsanalyse dient der Ermittlung von Bereichen, in denen sich Veränderungen von Modellparametern nicht essentiell auf das optimale Ergebnis des zugrunde liegenden Optimierungsproblems auswirken. Im Folgenden soll ausschließlich die einparametrische Sensitivitätsanalyse bzgl. der Zielfunktion eines linearen Optimierungsproblems behandelt werden, d.h. es wird immer nur *genau ein* Zielkoeffizient  $c_k$  durch eine additive Störgröße  $t$  verändert („ceteris paribus“)<sup>22</sup>. Diese einparametrische Veränderung lässt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$(13) \quad c_k \rightarrow c_k + t \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{c} + t \cdot \mathbf{e}^k \quad \text{für ein festes } k \in \{1, \dots, n\}; \quad \mathbf{e}^k \text{ ist der } k\text{-te Einheitsvektor.}^{23}$$

Die Bestimmung von sog. *kritischen Bereichen* oder *Sensitivitätsintervallen*  $[t_{\min}, t_{\max}]$  für  $t$ , so dass eine optimale Ecke  $\mathbf{x}^0$  trotz der Änderung  $c_k \rightarrow c_k + t$  optimal bleibt, solange  $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$  gilt, wird in nahezu allen Lehrbüchern nur für den Nichtentartungsfall behandelt. Hierbei lässt sich der kritische Bereich  $[t_{\min}, t_{\max}]$  anhand des (einigen) Simplextableaus von  $\mathbf{x}^0$  bestim-

<sup>22</sup> Die (einparametrischen) Sensitivitätsanalysen bzgl. der rechten Seite oder der technologischen Matrix spielen bei den hier behandelten Untersuchungen insofern keine besondere Rolle, weil durch die Veränderungen dieser Modellgrößen i.d.R. auch die Struktur des Lösungsraum und damit grundsätzlich auch die Entartungsstruktur des zugrunde liegenden Untersuchungsgegenstandes (also der entarteten Ecke) verändert werden. Eine mehrparametrische Betrachtungsweise findet im Kapitel 5 statt.

<sup>23</sup> O.B.d.A. könnte  $k=1$  gesetzt werden:  $c_1 \rightarrow c_1 + t$  bzw.  $\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{c} + t \cdot \mathbf{e}^1$ .

men.<sup>24</sup> Genauer gesagt gibt das Sensitivitätsintervall den Bereich für  $t$  an, so dass die zur Ecke  $\mathbf{x}^0$  gehörige Basis  $\mathbf{B}$  optimal bleibt.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden<sup>25</sup>:

1. Fall:

Die zu  $c_k$  gehörige Strukturvariable  $x_k$  ist Nichtbasisvariable (NBV) bzgl. der optimalen Basis  $\mathbf{B}$ . Dann ergibt sich:  $t_{\min} = -\infty$ ,  $t_{\max} = \Delta z_k$ . (Der Zielfunktionswert  $z_{\max}$  bleibt unverändert.)

2. Fall:

Die zu  $c_k$  gehörige Strukturvariable  $x_k$  ist Basisvariable (BV) bzgl. der optimalen Basis  $\mathbf{B}$ ; weiterhin sei  $r$  der Index derjenigen Zeile im Simplextableau, die der BV  $x_k$  entspricht. Es werden auf kanonische Weise zwei Teilmengen der Indexmenge  $J = \{1, \dots, n\}$  gebildet:

$$J^+ = \{j \in J \mid x_j \text{ ist NBV} \wedge y_{rj} > 0\} \text{ und } J^- = \{j \in J \mid x_j \text{ ist NBV} \wedge y_{rj} < 0\}.$$

Dann ergeben sich die Intervallgrenzen wie folgt:

$$t_{\min} = \begin{cases} \max \left\{ -\frac{\Delta z_j}{y_{rj}} \mid j \in J^+ \right\}, & \text{falls } J^+ \neq \emptyset \\ -\infty, & \text{falls } J^+ = \emptyset \end{cases}$$

$$t_{\max} = \begin{cases} \min \left\{ -\frac{\Delta z_j}{y_{rj}} \mid j \in J^- \right\}, & \text{falls } J^- \neq \emptyset \\ +\infty, & \text{falls } J^- = \emptyset \end{cases}$$

(Der Zielfunktionswert ändert sich:  $z_{\max}(t) = z_{\max} + y_r \cdot t$ .)

Im Entartungsfall besitzt die (optimale) Ecke  $\mathbf{x}^0$  viele Basen bzw. Simplextableaus, so dass die Begriffe des kritischen Bereiches für eine Basis  $\mathbf{B}$  und des Sensitivitätsintervalls für eine Ecke  $\mathbf{x}^0$  allgemeiner definiert werden müssen:

Es sei  $B^0$  die Basenmenge und  $B_c^0$  die Optimalbasenmenge von  $\mathbf{x}^0$  (bzgl.  $\mathbf{c}$ ). Nach dem obigen Bildungsprozess lässt sich zu jeder Basis  $\mathbf{B} \in B_c^0$  ein kritischer Bereich  $[t_{\min}, t_{\max}]^{(\mathbf{B})}$  für ein festes  $k \in \{1, \dots, n\}$  bestimmen. Aufgrund der Optimalität von  $\mathbf{B} \in B_c^0$  für  $t=0$  folgt:  $t_{\min} \leq 0 \leq t_{\max}$  bzw.  $0 \in [t_{\min}, t_{\max}]^{(\mathbf{B})}$ . Dieser Bildungsprozess lässt sich aber auch auf alle Basen  $\mathbf{B} \in B^0$  übertragen. Dabei ergibt sich für  $\mathbf{B} \in B^0 \setminus B_c^0$  zwangsläufig  $0 \notin [t_{\min}, t_{\max}]^{(\mathbf{B})}$ . Allerdings sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: Der kritische Bereich für  $\mathbf{B}$  ist leer (d.h.  $[t_{\min}, t_{\max}]^{(\mathbf{B})} = \emptyset$ ). Dieser Fall tritt auf, wenn sich bei der Ermittlung der Intervallgrenzen nach obiger Rechenvorschrift  $t_{\min} > t_{\max}$  ergibt. In diesem Fall ist die Basis  $\mathbf{B}$  für keinen Wert  $t \in \mathbb{R}$  optimal (bzgl.  $\mathbf{c}$ ).
2. Fall: Der kritische Bereich für  $\mathbf{B}$  ist nicht leer (also  $[t_{\min}, t_{\max}]^{(\mathbf{B})} \neq \emptyset$ ). In diesem Fall gilt entweder  $t_{\min} \leq t_{\max} < 0$  oder  $0 < t_{\min} \leq t_{\max}$ . Dann ist die Basis  $\mathbf{B}$  zwar nicht bzgl.  $\mathbf{c}$  optimal, wohl aber bei Veränderung von  $\mathbf{c}$  in  $\mathbf{c} + t \cdot \mathbf{e}^k$  mit  $t \in [t_{\min}, t_{\max}]^{(\mathbf{B})}$ .

Mit dieser Verallgemeinerung des kritischen Bereiches einer Basis  $\mathbf{B}$  (bzgl.  $\mathbf{c}$  und  $k$ ) lässt sich ohne weiteres das Sensitivitätsintervall für eine entartete Ecke  $\mathbf{x}^0$  definieren<sup>26</sup>:

Es sei eine (optimale) entartete Ecke  $\mathbf{x}^0$  eines LOP mit Zielfunktion  $z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}$  gegeben. Der Bereich für  $t \in \mathbb{R}$ , der garantiert, dass die Ecke  $\mathbf{x}^0$  (auch noch) bzgl. der Zielfunktion  $\mathbf{c} + t \cdot \mathbf{e}^k$

<sup>24</sup> Man beachte, dass die Fälle  $t_{\min} = -\infty$  oder  $t_{\max} = +\infty$  auftreten können, auch wenn die hier gewählte Schreibweise mit eckigen Klammern ein abgeschlossenes Intervall auf  $\mathbb{R}$  suggerieren.

<sup>25</sup> Beachte hierzu auch Tabelle 1.

<sup>26</sup> Vgl. Knolmayer (1984), Gal (1986), Pehler/Kruse (1988).



optimal ist, wird der **Optimalbereich** oder das **Sensitivitätsintervall zur Ecke**  $\mathbf{x}^0$  (bzgl.  $\mathbf{c}$ ) genannt; dieses Intervall ergibt sich als

$$(14) \quad T_c(\mathbf{x}^0) = \bigcup_{B \in B^0} [t_{\min}, t_{\max}]^{(B)}.$$

Man beachte, dass diese Begriffsbildung zur Definition des Sensitivitätsintervalls einer Ecke im Nichtentartungsfall kompatibel ist. Zur Hervorhebung des Zielkoeffizienten  $c_k$ , welcher variiert werden soll, wird der Optimalbereich gegebenenfalls auch mit  $T_{c_k}(\mathbf{x}^0)$  bezeichnet.

Die numerische Ermittlung des Optimalbereiches einer entarteten Ecke  $\mathbf{x}^0$  erweist sich als schwierig, denn zumindest nach der obigen Definition müssten für alle Basen  $B_u \in B^0$  die zugehörigen Simplextableaus von  $\mathbf{x}^0$  erstellt und die jeweiligen kritischen Bereiche  $[t_{\min}, t_{\max}]^{(B_u)}$  für  $u=1, \dots, U$  errechnet werden. Auf diese Problematik einer effizienten Bestimmung des Optimalbereiches einer entarteten Ecke wird später noch näher eingegangen.

Die Sensitivitätsanalyse soll nun von Basen bzw. Ecken auf Optimumgraphen übertragen werden. Es soll die Frage geklärt werden, in welchen Grenzen ein für  $t=0$  vorliegender Optimumgraph bei Variation von  $t$  invariant bleibt. Hierfür wird die Bezeichnung  $B_c^0$  für die Optimalbasenmenge von  $\mathbf{x}^0$  bzgl.  $\mathbf{c}$  auf Variationsmöglichkeiten von  $t$  erweitert:  $B_{c(t)}^0$  bezeichnet die Optimalbasenmenge von  $\mathbf{x}^0$  bzgl.  $\mathbf{c}(t) = \mathbf{c} + t \cdot \mathbf{e}^k$  für ein festes  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Dann gilt insbesondere:  $B_c^0 = B_{c(0)}^0$ . Weiterhin gilt per Definition:

$$(15) \quad B \in B_{c(t)}^0 \Leftrightarrow t \in [t_{\min}, t_{\max}]^{(B)}.$$

Mit dieser Bezeichnungsweise lässt sich sehr einfach der Bereich für  $t$  beschreiben, in dem der Optimumgraph  $O_c$  von  $\mathbf{x}^0$  (und damit auch  $O_c^+$  und  $O_c^-$ ) invariant ist<sup>27</sup>:

$$(16) \quad T(O_c) = \{t \in \mathbb{R} \mid B_c^0 = B_{c(t)}^0\}.$$

Dieser Bereich wird das **starke Sensitivitätsintervall** oder der **starke Invarianzbereich** des Optimumgraphen  $O_c$  genannt.

Für zwei Parameter  $t, t^* \in \mathbb{R}$  lässt sich die folgende Äquivalenzrelation  $\cong$  erklären:  $t \cong t^* \Leftrightarrow B_{c(t)}^0 = B_{c(t^*)}^0$ . Damit kann der starke Invarianzbereich von  $O_c$  auch durch

$$(17) \quad T(O_c) = \{t \in \mathbb{R} \mid t \cong 0\}$$

beschrieben werden.

Als **schwaches Sensitivitätsintervall** oder **schwacher Invarianzbereich** von  $O_c$  soll derjenige Bereich für  $t$  verstanden werden, in dem der Optimumgraph  $O_c$  zumindest noch als Teilgraph des Optimumgraphen  $O_{c(t)}$  erhalten bleibt.<sup>28</sup> Hierfür wird lediglich die Gleichheitsbeziehung in (16) in eine Teilmengenbeziehung umgewandelt:

<sup>27</sup> Da sich die verschiedenen Ausprägungen eines Optimumgraphen (als allgemeiner, positiver oder negativer) stets eindeutig aus der Optimalbasenmenge ergeben, erscheint im Folgenden immer nur der allgemeine Optimumgraph explizit als Repräsentant.

<sup>28</sup> Dabei wird jeder Graph als Teilgraph von sich selbst aufgefasst.

$$(18) \quad T'(O_c) = \{t \in \mathbb{R} \mid B_c^0 \subseteq B_{c(t)}^0\}.$$

Zwischen dem starken und dem schwachen Invarianzbereich eines Optimumgraphen gilt definitionsgemäß stets die Teilmengenbeziehung  $T(O_c) \subseteq T'(O_c)$ . Anhand von Beispielen zeigt sich, dass i.d.R. sogar die echte Teilmengenbeziehung  $T(O_c) \subset T'(O_c)$  gilt. Der schwache Invarianzbereich lässt sich allerdings auch durch die kritischen Bereiche aller bzgl.  $c$  optimalen Basen beschreiben, und zwar:

$$(19) \quad T'(O_c) = \bigcap_{B \in B_c^0} [t_{\min}, t_{\max}]^{(B)}.$$

Die Äquivalenz zwischen (18) und (19) lässt sich wie folgt nachweisen: Es sei  $t \in T'(O_c)$  gemäß (18)  $\Leftrightarrow B_c^0 \subseteq B_{c(t)}^0 \Leftrightarrow B \in B_{c(t)}^0$  für alle  $B \in B_c^0$  <sup>(15)</sup>  $\Leftrightarrow t \in [t_{\min}, t_{\max}]^{(B)}$  für alle  $B \in B_c^0 \Leftrightarrow t \in T'(O_c)$  gemäß (19).

Darüber hinaus soll noch der Bereich für  $t$  betrachtet werden, der sicherstellt, dass immer noch mindestens eine Basis  $B \in B_c^0$  optimal ist, also  $B_c^0 \cap B_{c(t)}^0 \neq \emptyset$  gilt:

$$(20) \quad T''(O_c) = \{t \in \mathbb{R} \mid B_c^0 \cap B_{c(t)}^0 \neq \emptyset\}.$$

Dieser Bereich wird der **Partizipationsbereich** von  $O_c$  genannt.

Per Definition gilt:  $T'(O_c) \subseteq T''(O_c)$ . Anhand von Beispielen zeigt sich, dass i.d.R. auch hier die echte Teilmengenbeziehung  $T'(O_c) \subset T''(O_c)$  gilt. Der Partizipationsbereich von  $O_c$  kann auch als Vereinigung von kritischen Bereichen beschrieben werden:

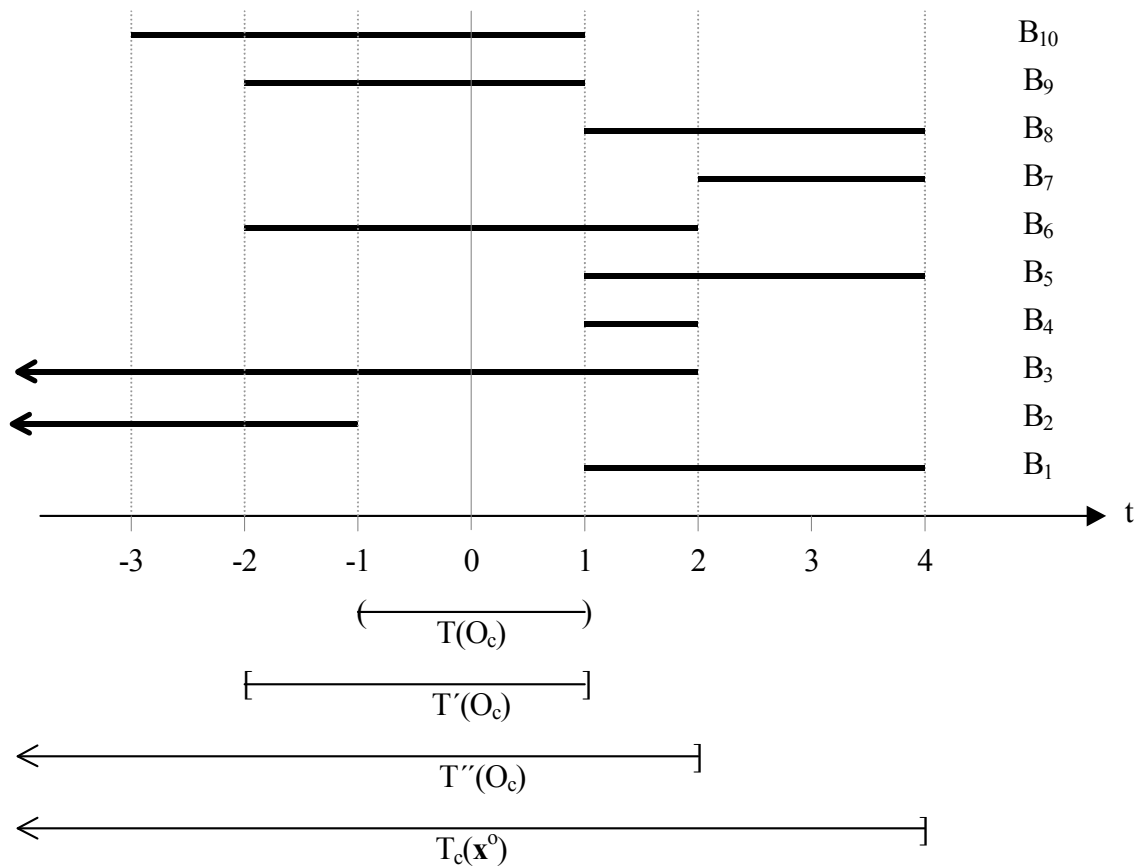
$$(21) \quad T''(O_c) = \bigcup_{B \in B_c^0} [t_{\min}, t_{\max}]^{(B)}.$$

Die Äquivalenz von (20) und (21) ergibt sich wegen (15): Es sei  $t \in T''(O_c)$  gemäß (20)  $\Leftrightarrow B_c^0 \cap B_{c(t)}^0 \neq \emptyset \Leftrightarrow$  es existiert  $B \in B_{c(t)}^0$ , so dass auch  $B \in B_c^0$  <sup>(15)</sup>  $\Leftrightarrow$  es existiert  $B \in B_c^0$ , so dass  $t \in [t_{\min}, t_{\max}]^{(B)} \Leftrightarrow t \in T''(O_c)$  gemäß (21).

Aus (14) und (21) folgt wegen  $B_c^0 \subseteq B^0$  sofort:  $T''(O_c) \subseteq T_c(x^0)$ .

Der theoretische Zusammenhang zwischen den eingeführten Bereichen für  $t$  soll anhand der folgenden Skizze verdeutlicht werden. Für eine fiktive Ecke  $x^0$  mit  $U=10$  Basen  $B_u$  sind die kritischen Bereiche  $[t_{\min}, t_{\max}]^{(B_u)}$  für  $u=1, \dots, 10$  tabellarisch aufgeführt und in Form eines „Strichdiagrammes“ dargestellt (Abb. 6). Zudem werden der starke Invarianzbereich  $T(O_c)$ , der schwache Invarianzbereich  $T'(O_c)$  und der Partizipationsbereich  $T''(O_c)$  des Optimumgraphen  $O_c$  sowie der Optimalbereich  $T_c(x^0)$  der entarteten Ecke  $x^0$  angezeigt.

Basen $B_u$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$B_7$	$B_8$	$B_9$	$B_{10}$
$t_{\min}$	1	$-\infty$	$-\infty$	1	1	-2	2	1	-2	-3
$t_{\max}$	4	-1	2	2	4	2	4	4	1	1



**Abb. 6:** Invarianz- und Optimalbereiche zu einer entarteten Ecke  $\mathbf{x}^0$

Die Optimalbasenmenge von  $\mathbf{x}^0$  bzgl.  $\mathbf{c}$  ergibt sich als  $B_c^0 = B_{c(0)}^0 = \{B_3, B_6, B_9, B_{10}\}$ . Der Optimumgraph  $O_c$  besteht demnach aus 4 Knoten. Wegen  $B_{c(-1)}^0 = \{B_2, B_3, B_6, B_9, B_{10}\}$  und  $B_{c(1)}^0 = \{B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_8, B_9, B_{10}\}$  gilt die starke Invarianz  $B_c^0 = B_{c(t)}^0$  nur für  $-1 < t < 1$ . Somit ist der starke Invarianzbereich von  $O_c$  das offene Intervall  $T(O_c) = (-1; 1)$ . Der schwache Invarianzbereich  $T'(O_c)$  ist das geschlossene Intervall  $[-2; 1]$ , das sich gemäß (19) als Schnitt der Intervalle  $(-\infty; 2]$ ,  $[-2; 2]$ ,  $[-2; 1]$  und  $[-3; 1]$  ergibt. Der Partizipationsbereich  $T''(O_c)$  ergibt sich gemäß (21) als Vereinigung der Intervalle  $(-\infty; 2]$ ,  $[-2; 2]$ ,  $[-2; 1]$  und  $[-3; 1]$ , also als das halboffene Intervall  $(-\infty; 2]$ . Der Optimalbereich der Ecke  $\mathbf{x}^0$  ist die Vereinigung aller kritischen Bereiche, also  $T_c(\mathbf{x}^0) = (-\infty; 4]$ . Für dieses fiktive Beispiel, an dem in erster Linie die obigen Begriffsdefinitionen veranschaulicht werden sollen, ergeben sich durchweg echte Teilmengenbeziehungen:  $T(O_c) \subset T'(O_c) \subset T''(O_c) \subset T_c(\mathbf{x}^0)$ .

Auf dem Wege von  $-\infty$  bis  $+\infty$  durchläuft der Parameter  $t$  verschiedene Intervalle, für die sich verschiedene Optimumgraphen  $O_{c(t)}$  ergeben. In der folgenden Tabelle sind die (teilweise einelementigen) Intervalle für  $t$  mit den zugehörigen Optimalbasenmengen  $B_{c(t)}^0$  aufgelistet:

**Tab. 2:** Optimalbasenmengen  $B_{c(t)}^0$  zu einer entarteten Ecke  $x^0$

Intervalle für t	Optimalbasenmengen $B_{c(t)}^0$
$(-\infty; -3)$	$\{B_2, B_3\}$
$[-3; -2)$	$\{B_2, B_3, B_{10}\}$
$[-2; -1]$	$\{B_2, B_3, B_6, B_9, B_{10}\}$
$(-1; 1)$	$\{B_3, B_6, B_9, B_{10}\}$
$\{1\} \equiv [1; 1]$	$\{B_1, B_3, B_4, B_5, B_6, B_8, B_9, B_{10}\}$
$(1; 2)$	$\{B_1, B_3, B_4, B_5, B_6, B_8\}$
$\{2\} \equiv [2; 2]$	$\{B_1, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8\}$
$(2; 4]$	$\{B_1, B_5, B_7, B_8\}$
$(4; \infty)$	$\{\}$

Demnach liegen  $r=6$  Intervallübergänge und 8 verschiedene Optimumgraphen vor.<sup>29</sup>

Die Entwicklung der Optimalbasenmengen  $B_{c(t)}^0$  und der Optimumgraphen  $O_{c(t)}$  entlang  $-\infty < t < +\infty$  wird auch anhand des folgenden konkreten Beispiels dargestellt (vgl. Anhang 5).

**Beispiel 3:**

Das durch  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  und  $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$  spezifizierte LOP hat die optimale Ecke

$x^0 = (0, 1, 0)^T$  mit Entartungsgrad  $\sigma=2$  und Entartungszahl  $U=10$ . Die zur Basenmenge  $B^0 = \{B_u \mid u=1, \dots, 10\}$  gehörenden Simplextableaus befinden sich im Anhang 5. Die Optimalbasenmenge von  $x^0$  bzgl.  $c$  ergibt sich als  $B_c^0 = \{B_3, B_8, B_{10}\}$ . Der Optimumgraph  $O_c$  besteht demnach aus 3 Knoten. Bei Variation der Zielkoeffizienten  $c_k \rightarrow c_k + t$  für  $k=1, 2, 3$  ergeben sich die folgenden kritischen Bereiche der Basen  $B_u$  ( $u=1, \dots, 10$ )<sup>30</sup>:

**Tab. 3:** Kritische Bereiche aller Basen  $B_u \in B^0$  zum Beispiel 3

$B_u$	$[t_{\min}, t_{\max}]^{(B_u)}$		
	bzgl. $c_1$	bzgl. $c_2$	bzgl. $c_3$
$B_1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$[1, 5; 1, \bar{6}]$
$B_2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$[1; 1, 5]$
$B_3$	$\emptyset$	$\emptyset$	$[1; 1, \bar{6}]$
$B_4$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$B_5$	$(-\infty; -0, 2]$	$[1; \infty)$	$\emptyset$
$B_6$	$[-1; 1]$	$[-2; \infty)$	$(-\infty; 1, 5]$
$B_7$	$[-1; -0, 2]$	$[1; \infty)$	$\emptyset$
$B_8$	$[-0, 2; 1]$	$[-2; 1]$	$(-\infty; 1, \bar{6}]$
$B_9$	$(-\infty; -1]$	$\emptyset$	$\emptyset$
$B_{10}$	$(-\infty; 1]$	$[-2; \infty)$	$(-\infty; 1]$

<sup>29</sup> Der leere Graph für das Intervall  $(4; \infty)$  wird nicht als ein Optimumgraph verstanden.

<sup>30</sup> Eine graphische Veranschaulichung der kritischen Bereiche findet man im Anhang 5.

Daraus ergeben sich die Invarianz- und Partizipationsbereiche des Optimumgraphen  $O_c$  und die Optimalbereiche der entarteten Ecke  $x^0$  wie folgt:

**Tab. 4:** Optimal- und Invarianzbereiche zum Beispiel 3

	bzgl. $c_1$	bzgl. $c_2$	bzgl. $c_3$
$T(O_c)$	$(-0,2; 1]$	$[-2; 1)$	$(-\infty; 1)$
$T'(O_c)$	$[-0,2; 1]$	$[-2; 1]$	$(-\infty; 1]$
$T''(O_c)$	$(-\infty; 1]$	$[-2; \infty)$	$(-\infty; 1, \bar{6}]$
$T_c(x^0)$	$(-\infty; 1]$	$[-2; \infty)$	$(-\infty; 1, \bar{6}]$

Die bei den Intervallübergängen entlang  $-\infty < t < +\infty$  erzeugten Optimalbasismengen  $B_{c(t)}^0$  bzgl.  $c_k$  für  $k=1,2,3$  sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

**Tab. 5:** Optimalbasismengen  $B_{c(t)}^0$  zum Beispiel 3

Intervalle bzgl. $c_1$	Optimalbasismengen $B_{c(t)}^0$ bzgl. $c_1$
$(-\infty; -1)$	$\{B_5, B_9, B_{10}\}$
$\{-1\} \equiv [-1; -1]$	$\{B_5, B_6, B_7, B_9, B_{10}\}$
$(-1; -0,2)$	$\{B_5, B_6, B_7, B_{10}\}$
$\{-0,2\}$	$\{B_5, B_6, B_7, B_8, B_{10}\}$
$(-0,2; 1]$	$\{B_6, B_8, B_{10}\}$
Intervalle bzgl. $c_2$	Optimalbasismengen $B_{c(t)}^0$ bzgl. $c_2$
$[-2; 1)$	$\{B_6, B_8, B_{10}\}$
$\{1\}$	$\{B_5, B_6, B_7, B_8, B_{10}\}$
$(1; -\infty)$	$\{B_5, B_7, B_{10}\}$
Intervalle bzgl. $c_3$	Optimalbasismengen $B_{c(t)}^0$ bzgl. $c_3$
$(-\infty; 1)$	$\{B_6, B_8, B_{10}\}$
$\{1\}$	$\{B_2, B_3, B_6, B_8, B_{10}\}$
$(1; 1,5)$	$\{B_2, B_3, B_6, B_8\}$
$\{1,5\}$	$\{B_1, B_2, B_3, B_6, B_8\}$
$(1,5; 1, \bar{6}]$	$\{B_1, B_3, B_8\}$

Die durch die Optimalbasismengen  $B_{c(t)}^0$  (bzgl.  $c_k$  für  $k=1,2,3$ ) induzierten Optimumgraphen sind im Anhang 5 veranschaulicht.

Offensichtlich erweist sich das Auftreten von einelementigen Bereichen (wie  $\{1\}$  und  $\{2\}$  im obigen fiktiven Beispiel) als „Normalfall“. Überhaupt tritt in sämtlichen bisher untersuchten Beispielen eine bestimmte Intervallfolge bzgl. der Übergänge zwischen den Optimumgraphen  $O_{c(t)}$  bzw. den Optimalbasismengen  $B_{c(t)}^0$  auf (vgl. Beispiel 3):

$$(22) \quad (-\infty; t_1), [t_1; t_1], (t_1; t_2), [t_2; t_2], (t_2; t_3), [t_3; t_3], \dots, [t_{r-1}; t_{r-1}], (t_{r-1}; t_r] \text{ oder} \\ [t_1; t_2), [t_2; t_2], (t_2; t_3), [t_3; t_3], \dots, [t_{r-1}; t_{r-1}], (t_{r-1}; t_r), [t_r; t_r], (t_r; +\infty).$$

Dieses Phänomen führt zu der folgenden Begriffsbildung: Ein Optimumgraph  $O_c$ , dessen Invarianzbereiche einelementig sind (d.h.  $T(O_c) = T'(O_c) = \{0\}$ ), wird auch **punktuellem Optimumgraph** genannt. Andernfalls spricht man von einem **extensiven Optimumgraph** (d.h. es existiert  $t \neq 0$  mit  $t \in 0$  gemäß (17)).

Die Eigenschaft, extensiver bzw. punktueller Optimumgraph zu sein, bezieht sich stets auf einen vorgegebenen Zielkoeffizienten  $c_k$ , weswegen ein Optimumgraph  $O_c$  genauer als punktuell bzw. extensiv bzgl.  $c_k$  bezeichnet werden muss. Im Beispiel 3 ist der Optimumgraph  $O_c$  extensiv bzgl.  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$ . Demgegenüber ist der Optimumgraph  $O_{c(t_2)}$  für  $t_2=1$ , der dem Optimumgraph  $O_c$  mit  $\mathbf{c}=(1;5;-1)^T$  entspricht, punktuell bzgl.  $c_1$  und  $c_2$  sowie extensiv bzgl.  $c_3$  (siehe Anhang 6).

Bei einer Intervallfolge gemäß (22) lösen sich also extensive und punktuelle Optimumgraphen ab. Dabei unterscheiden sich starke und schwache Invarianzbereiche eines Optimumgraphen  $O_c$  allein durch den Ausschluss (bzw. den Einschluss) der Intervallgrenzen:

$$(22) \quad T(O_c) = (t_u; t_o) \subset [t_u; t_o] = T'(O_c) \text{ für } t_u < t_o \text{ bzw. } T(O_c) = T'(O_c) = [0; 0] = \{0\}$$

(vgl. Beispiel 3).<sup>31</sup>

Es wurden bislang noch keine Gegenbeispiele zu diesem Übergangsverhalten gefunden; stets findet der Übergang zwischen Optimumgraphen entlang  $-\infty < t < +\infty$  anhand von punktuellen Optimumgraphen statt. Diese entstehen genau dadurch, dass an den jeweiligen Intervallübergängen mindestens ein kritischer Bereich endet und gleichzeitig mindestens ein anderer kritischer Bereich anfängt, d.h. zu  $B_u$  mit  $[t_{\min}^{(u)}, t_{\max}^{(u)}]^{(B_u)}$  existiert stets ein  $B_v$  mit  $[t_{\min}^{(v)}, t_{\max}^{(v)}]^{(B_v)}$ , so dass  $t_{\min}^{(v)} = t_{\max}^{(u)}$  gilt. Lediglich die Grenzen des Optimalbereiches von  $\mathbf{x}^0$  stellen hierzu kanonische Ausnahmen dar.

Dieser Sachverhalt relativiert die Begriffsbildungen *starker* und *schwacher* Invarianzbereich eines Optimumgraphen enorm, so dass im Folgenden allgemein vom *Invarianzbereich* gesprochen wird. Für das Phänomen der alternierenden Intervallfolge gemäß (22) fehlt allerdings bislang ein allgemein gültiger Beweis, so dass es sich hierbei lediglich um eine Vermutung oder These handelt.

In allen bislang untersuchten Beispielen zeigt sich ein weiteres, sehr interessantes Phänomen. Offensichtlich existiert stets (d.h. bei jeweiliger Variation der Zielkoeffizienten  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$ ) eine Basis  $B \in B_c^0$ , deren kritischer Bereich  $[t_{\min}; t_{\max}]^{(B)}$  mit dem Optimalbereich  $T_c(\mathbf{x}^0)$  der entarteten Ecke übereinstimmt. Die Invarianz der Optimalität der entarteten Ecke (bzgl.  $c_k$ ) wird demnach durch eine einzige Basis  $B$  repräsentiert, indem der Optimalitätsbereich  $T_c(\mathbf{x}^0)$  allein am Simplextableau von  $B$  zu bestimmen ist. Eine Basis  $B \in B_c^0$  mit dieser besonderen Eigenschaft wird im Folgenden auch **Repräsentant** (der Optimalität von  $\mathbf{x}^0$  bzgl.  $c_k$ ) genannt. Da es mehr als einen Repräsentanten geben kann, werden sie zur **Repräsentantenmenge**  $R_k$  zusammengefasst.

Die Repräsentantenmengen in Beispiel 3 ergeben sich durch Vergleich der Tabellen 3 und 4:  $R_1 = \{B_{10}\}$ ,  $R_2 = \{B_6, B_{10}\}$  und  $R_3 = \{B_8\}$ . Beim Übergang des Zielkoeffizientenvektors  $\mathbf{c}=(1;4;-1)^T$  in  $\mathbf{c}+\mathbf{e}^2=(1;5;-1)^T$  ergeben sich die Repräsentantenmengen  $R_1 = \{B_5, B_{10}\}$ ,  $R_2 = \{B_6, B_{10}\}$  und  $R_3 = \{B_5, B_7, B_8\}$ .

Eine besondere Bedeutung erhalten Repräsentanten im Zusammenhang mit dem bereits angesprochenen Problem einer *effizienten* Bestimmung der Optimalbereiche einer entarteten Ecke, zumal die Ermittlung der kritischen Bereiche  $[t_{\min}, t_{\max}]^{(B_u)}$  aller Basen  $B_u \in B^0$  für  $u=1, \dots, U$

<sup>31</sup> Der Vollständigkeit halber seien auch die äußeren Grenzfälle aufgeführt:  $T(O_c) = (-\infty; t_1) \subset (-\infty; t_1] = T'(O_c)$  bzw.  $T(O_c) = (t_1; \infty) \subset [t_1; \infty) = T'(O_c)$ .

wegen (4) einen immens großen Rechenaufwand nach sich zieht. Daher wird grundsätzlich nach einer Basenmenge  $\tilde{B}^0 \subset B^0$  gesucht, die einerseits über sämtliche Informationen hinsichtlich der einparametrischen Sensitivitätsanalyse bzgl. der Zielkoeffizienten verfügt und andererseits möglichst wenige Basen enthält<sup>32</sup>:

Eine Basenmenge  $\tilde{B}^0 \subseteq B^0$  mit der Eigenschaft, dass die Optimalbereiche  $T_{c_k}(x^0)$  anhand der zugehörigen Simplextableaus berechnet werden können, nennt man auch eine **Informationsmenge** (bzgl. der Sensitivitätsintervalle). Darüber hinaus heißt eine Informationsmenge  $\tilde{B}^0$ , die keine Informationsmenge als echte Teilmenge enthält, eine **minimale Informationsmenge**.

Demnach ließe sich das Problem einer effizienten Bestimmung der Optimalbereiche einer entarteten Ecke (bzw. der Ermittlung einer minimalen Informationsmenge) auf die Suche nach Repräsentanten einschränken. In Beispiel 3 lassen sich die Optimalbereiche  $T_{c_k}(x^0)$  allein an den Simplextableaus der Basen  $B_8$  (bzgl.  $c_3$ ) und  $B_{10}$  (bzgl.  $c_1$  und  $c_2$ ) ermitteln. Die Simplextableaus dieser beiden Repräsentanten enthalten also sämtliche Informationen hinsichtlich der einparametrischen Sensitivitätsanalyse bzgl. der Zielkoeffizienten. Also stellt  $\tilde{B}^0 = \{B_8, B_{10}\}$  eine minimale Informationsmenge dar.

Allerdings müsste grundlegend sichergestellt sein, dass es sich bei der Existenz von Repräsentanten um einen allgemein gültigen Sachverhalt handelt, d.h. dass es bei *allen* LOP mit einer optimalen entarteten Ecke stets Repräsentanten gibt (und zwar bzgl.  $c_k$  für  $k=1, \dots, n$ ). Zwar konnten bislang noch keine Gegenbeispiele zum Auftreten von Repräsentanten konstruiert werden, dennoch fehlt ein endgültiger Beweis, so dass es sich hierbei ebenfalls nur um eine Vermutung handelt.

Eine weitere Konsequenz ergibt sich für den Begriff des Partizipationsbereiches eines Optimumgraphen, denn beim Vorliegen von Repräsentanten sind Partizipations- und Optimalbereiche identisch:  $T''(O_c) = T_c(x^0)$ . Somit spielen Partizipationsbereiche nur noch eine theoretische Rolle.

Zum Abschluss dieses Kapitels soll noch kurz auf weitere Beobachtungen eingegangen werden:

Es tritt das Phänomen auf, dass der kritische Bereich  $[t_{\min}; t_{\max}]^{(B)}$  einer Basis  $B$  einelementig ist, d.h.  $t_{\min} = t_{\max}$  (vgl. Anhang 6). Weiterhin ist zu beobachten (vgl. Beispiel 3), dass es Basen gibt, die weder bzgl.  $c$  noch bzgl.  $c(t)$  für beliebiges  $t \in \mathbb{R}$  optimal sind. Beispielsweise ist in Tab. 3 zu erkennen, dass die Basen  $B_1, B_2, B_3$  und  $B_4$  durch keine Veränderung von  $c_1 \rightarrow c_1 + t$  optimal wird; dasselbe gilt für die Basen  $B_1, B_2, B_3, B_4$  und  $B_9$  bzgl.  $c_2$  sowie die Basen  $B_4, B_5, B_6$  und  $B_9$  bzgl.  $c_3$ . Insbesondere bleibt die Basis  $B_4$  gegenüber jeder möglichen Veränderung von  $c \rightarrow c + t \cdot e^k$  für  $k=1,2,3$  und  $t \in \mathbb{R}$  dual unzulässig, wird also nicht optimal (bzgl.  $c$ ).

Aufgrund dieser möglichen Optimalitätseigenschaften von Basen  $B \in B^0$  in Bezug auf einen festen Zielkoeffizientenvektor  $c$  und den Variationsmöglichkeiten  $c \rightarrow c(t) = c + t \cdot e^k$  für  $t \in \mathbb{R}$  und  $k \in \{1, \dots, n\}$  sind die folgenden Begriffserweiterungen sinnvoll:

Eine Basis  $B \in B_c^0$  heißt **punktuell** (bzw. **extensiv**) **optimal** bzgl.  $c_k$ , wenn für den kritischen Bereich  $[t_{\min}; t_{\max}]^{(B)}$  bzgl.  $c_k$  gilt:  $t_{\min} = t_{\max}$  (bzw.  $t_{\min} < t_{\max}$ ).

<sup>32</sup> Vgl. Pehler/Kruse (1989), Pehler (1990), Knolmayer/Knöbel (1992).

Eine Basis  $\mathbf{B} \in B^0$  heißt *optimalisierbar* bzgl.  $c_k$ , wenn es ein  $t \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $\mathbf{B} \in B_{\mathbf{c}(t)}^0$  für  $\mathbf{c}(t) = \mathbf{c} + t \cdot \mathbf{e}^k$ , und dabei *punktuell* (bzw. *extensiv*) *optimalisierbar* bzgl.  $c_k$ , wenn für den kritischen Bereich  $[t_{\min}; t_{\max}]^{(B)}$  bzgl.  $c_k$  gilt:  $t_{\min} = t_{\max}$  (bzw.  $t_{\min} < t_{\max}$ ).

Eine Basis  $\mathbf{B} \in B^0$  heißt *optimalisierbar* bzgl.  $\mathbf{c}$ , wenn  $\mathbf{B}$  für mindestens einen Index  $k \in \{1, \dots, n\}$  optimalisierbar bzgl.  $c_k$  ist.

Entsprechend diesen Begriffsbildungen gilt für die Basen  $B_u$ ,  $u=1, \dots, 10$ , aus Beispiel 3:  $B_6$ ,  $B_8$  und  $B_{10}$  sind extensiv optimal<sup>33</sup> bzgl.  $c_k$  für  $k=1,2,3$ ;  $B_1$ ,  $B_2$  und  $B_3$  sind extensiv optimalisierbar bzgl.  $c_3$ ;  $B_5$  und  $B_7$  sind extensiv optimalisierbar bzgl.  $c_1$  und  $c_2$ ;  $B_9$  ist extensiv optimalisierbar bzgl.  $c_1$ ;  $B_4$  ist nicht optimalisierbar bzgl.  $\mathbf{c}$ .

Analog gilt für die 10 Basen  $B_u$  des modifizierten Beispiels 3 (vgl. Anhang 6):

$B_5$ ,  $B_6$ ,  $B_7$ ,  $B_8$ ,  $B_{10}$  sind extensiv optimal bzgl.  $c_k$  für  $k=1,2,3$ ;  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  sind extensiv optimalisierbar bzgl.  $c_3$ ;  $B_9$  ist extensiv optimalisierbar bzgl.  $c_1$ ;  $B_4$  ist punktuell optimalisierbar bzgl.  $c_3$ .

Anhand des obigen Beispiels zeigt sich, dass Basen, die bzgl. eines gegebenen Zielkoeffizientenvektors  $\mathbf{c}$  nicht optimalisierbar sind, trotzdem als optimale Basen in Erscheinung treten können. Hierzu ist allerdings eine Verallgemeinerung der „partiellen Optimalisierung“, d.h. einer Veränderung von  $\mathbf{c}$  entlang der einzelnen „Koordinaten“  $c_k$ , erforderlich, welche man in Anlehnung an die Begriffswelt bei der Differentiation von reellwertigen Funktionen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  als „Richtungs-Optimalisierung“ bezeichnen könnte.<sup>34</sup> Beispielsweise lässt sich die Basis  $B_4$  aus Beispiel 3 nicht in Richtung  $\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{c} + t \cdot \mathbf{e}^k$  für  $k=1,2,3$  (d.h. „partiell“) optimalisieren, wohl aber in Richtung  $\mathbf{c} \rightarrow \underline{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{c} + t \cdot \mathbf{v}$  mit  $\mathbf{v} = (0; 1; 2)^T$ , denn  $B_4$  ist bzgl.  $\underline{\mathbf{c}}(1) = (1; 5; 1)^T$  optimal. Diese verallgemeinerte Betrachtungsweise wird in Kapitel 5 vertieft.

## 5. Gesamtheiten von Optimumgraphen

Es wird die Frage nach den Gesamtheiten von Optimumgraphen untersucht, d.h. wie viele verschiedene Optimumgraphen eine gegebene  $\sigma$ -entartete Ecke  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$  des Lösungsraumes  $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$  eines LOP mit festem  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  sowie variablem Zielwertvektor  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  für die Zielfunktion  $z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}$  besitzt.

Diese Problemstellung wird zunächst am Spezialfall  $n=2$  entwickelt, da hierbei eine anschauliche Darstellung möglich ist und auch recht einfach ein Verfahren zur Bestimmung aller Optimumgraphen hergeleitet werden kann. Anschließend wird das Problem auf den allgemeinen Fall  $n > 2$  verallgemeinert.

<sup>33</sup> Man beachte, dass eine (punktuell oder extensiv) optimale Basis trivialerweise erst recht (punktuell bzw. extensiv) optimalisierbar ist.

<sup>34</sup> Die Verallgemeinerung der partiellen Ableitungen (d.h. Ableitungen in Richtung  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + t \cdot \mathbf{e}^k$ ) sind die Richtungsableitungen (d.h. Ableitungen in Richtung  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + t \cdot \mathbf{v}$  mit festem Richtungsvektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , wobei auf die übliche Forderung  $|\mathbf{v}|=1$  in diesem Beispiel allerdings verzichtet wird).



## 5.1. Gesamtheiten von Optimumgraphen im $\mathbb{R}^2$

Gegeben sei eine  $\sigma$ -entartete Ecke  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$  des Lösungsraumes eines LOP der Form (vgl. (1)):

$$(23) \quad \max_{\mathbf{x} \in X} z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{mit Lösungsraum } X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times 2}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

Dabei seien  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{b}$  feste Größen,  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T$  variabel. Das zu einer zulässigen Basis  $\mathbf{B}$  des LOP gehörende Simplextableau (vgl. Tab. 6) besitzt zwei Nichtbasisspalten, welche zu den beiden existierenden Nichtbasisvariablen  $x_\kappa$  und  $x_\lambda$  gehören;  $\kappa, \lambda \in \{1, \dots, m+2\}$ ,  $\kappa \neq \lambda$ . Die zugehörigen Werte  $\Delta z_\kappa$  und  $\Delta z_\lambda$  in der Kriteriumszeile ergeben sich als Linearkombinationen der beiden Zielkoeffizienten  $c_1$  und  $c_2$ , d.h.

$$(24) \quad \Delta z_\kappa = \alpha_1 \cdot c_1 + \alpha_2 \cdot c_2 \quad \text{und} \quad \Delta z_\lambda = \beta_1 \cdot c_1 + \beta_2 \cdot c_2; \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R} \text{ für } i=1,2.$$

Die Basis(lösung) ist also genau dann optimal, wenn gilt:

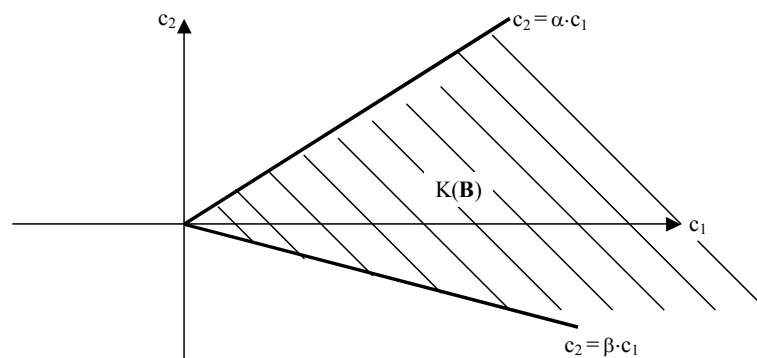
$$(25) \quad \Delta z_\kappa = \alpha_1 \cdot c_1 + \alpha_2 \cdot c_2 \geq 0 \quad \wedge \quad \Delta z_\lambda = \beta_1 \cdot c_1 + \beta_2 \cdot c_2 \geq 0.$$

**Tab. 6:** Verkürztes Simplextableau<sup>35</sup> einer Basislösung im  $\mathbb{R}^2$

BV	NBV		$\mathbf{x}_B$
	$x_\kappa$	$x_\lambda$	
$x_{k_1}$	$y_{1\kappa}$	$y_{1\lambda}$	$y_1$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$x_{k_m}$	$y_{m\kappa}$	$y_{m\lambda}$	$y_m$
$\Delta z_j$	$\Delta z_\kappa$	$\Delta z_\lambda$	$z$

**Legende:**  $y_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $y_i \in \mathbb{R}$ ,  $\Delta z_j \in \mathbb{R}$  für  $i=1, \dots, m$ ,  $j=\kappa, \lambda$ ;  $z \in \mathbb{R}$ ;  
 $\{k_1, \dots, k_m\} \subset \{1, \dots, m+2\} \setminus \{\kappa, \lambda\}$ .

Der Bereich für  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T$ , in dem die Ungleichungen (25) erfüllt sind, bildet einen konvexen Kegel<sup>36</sup> im  $\mathbb{R}^2$ . Er werde als **Optimalkegel**  $K(\mathbf{B})$  zur Basis  $\mathbf{B}$  bezeichnet. Dieser Optimalkegel  $K(\mathbf{B})$  wird durch zwei Strahlen vom Nullpunkt eingegrenzt, welche sich aus den Geraden  $c_2 = \alpha \cdot c_1$  und  $c_2 = \beta \cdot c_1$  mit  $\alpha = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$  bzw.  $\beta = -\frac{\beta_1}{\beta_2}$  bilden (siehe Abb. 7).<sup>37</sup>



**Abb. 7:** Konvexer Kegel  $K(\mathbf{B})$  im  $\mathbb{R}^2$

<sup>35</sup> Das verkürzte Simplextableau entsteht aus dem allgemeinen Simplextableau (vgl. Tab. 1) durch Weglassen der Basisspalten, die nur aus den Einheitsvektoren bestehen und keine zusätzlichen Informationen liefern.

<sup>36</sup> Ein **Kegel** im  $\mathbb{R}^n$  ist eine nichtleere Punktmenge  $K \subset \mathbb{R}^n$ , für die gilt:  $\mathbf{x} \in K \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{x} \in K$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}_\geq$ . Ein Kegel  $S$  mit der Eigenschaft, dass ein  $\mathbf{z} \in S$  ( $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ ), sodass zu jedem  $\mathbf{x} \in S$  ein  $\lambda \in \mathbb{R}_\geq$  mit  $\mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{z}$  existiert, wird ein **Strahl** im  $\mathbb{R}^n$  genannt. Man beachte, dass der hier benutzte spezielle Kegelbegriff die „Kegelspitze“ im Nullpunkt fordert.

<sup>37</sup> Falls  $\alpha_2 = 0$  oder  $\beta_2 = 0$  gilt, entspricht der zugehörige Strahl der nichtnegativen  $c_1$ -Achse.

Dieser Sachverhalt ergibt sich für alle zulässigen Basen des LOP, d.h. jede zulässige Basis  $\mathbf{B}$  des LOP besitzt einen Optimalkegel im  $\mathbb{R}^2$ , d.h. einen Bereich für Werte der Zielkoeffizienten  $c_1$  und  $c_2$ , für die  $\mathbf{B}$  optimal ist. Darüber hinaus bildet die Schnittmenge der Optimalkegel mehrerer zulässiger Basen denjenigen Bereich von Zielvektoren  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T$ , für die alle beteiligten Basen gleichzeitig optimal sind. Diese Schnittmenge ist entweder trivial, d.h. sie besteht dann nur aus dem Nullpunkt<sup>38</sup>, oder sie stellt ebenfalls einen (nichttrivialen) konvexen Kegel dar. Diese nichttrivialen konvexen Schnitte von Optimalkegeln werden im Folgenden als *Schnittkegel* bezeichnet.

Auf die Basen einer entarteten Ecke  $\mathbf{x}^0$  übertragen bedeutet dieser Sachverhalt, dass zwischen den Optimalbasismengen von  $\mathbf{x}^0$  und den Schnittkegeln, die sich als nichttriviale konvexe Schnitte aus Optimalkegeln von Basen  $B_u \in B^0$  ergeben, eine eindeutige Beziehung besteht, d.h. jeder Optimalbasismenge ist eindeutig ein Schnittkegel aus Optimalkegeln  $K(B_u)$  zuge-wiesen. Dieser Sachverhalt wird am folgenden, sehr simplen Entartungsbeispiel deutlich gemacht.<sup>39</sup>

#### Beispiel 4:

Betrachte das LOP  $\max! c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$  u.d.N.  $x_1 + x_2 \leq 1, x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ . Der Lösungsraum  $X$  besteht aus den nichtentarteten Ecken  $(0;0)^T$  und  $(1;0)^T$  sowie der entarteten Ecke  $(0;1)^T$  mit  $\sigma=1$  und  $U=3$ . Die zugehörigen Simplextableaus sind:

BV-Index	$x_1$	$x_2$	$x_3 (S_1)$	$x_4 (S_2)$	$x_B$	Basis Nr.
3	1	1	1	0	1	1
4	0	1	0	1	1	
$\Delta Z$	$-c_1$	$-c_2$	0	0	0	
1	1	1	1	0	1	2
4	0	1	0	1	1	
$\Delta Z$	0	$c_1 - c_2$	$c_1$	0	$c_1$	
2	1	1	1	0	1	3
4	-1	0	-1	1	0	
$\Delta Z$	$c_2 - c_1$	0	$c_2$	0	$c_2$	

BV-Index	$x_1$	$x_2$	$x_3 (S_1)$	$x_4 (S_2)$	$x_B$	Basis Nr.
1	1	0	1	-1	0	4
2	0	1	0	1	1	
$\Delta Z$	0	0	$c_1$	$c_2 - c_1$	$c_2 + c_1$	
2	0	1	0	1	1	5
3	1	0	1	-1	0	
$\Delta Z$	$-c_1$	0	0	$c_2$	0	

[Basis 1  $\equiv$  Ecke  $(0;0)^T$ ; Basis 2  $\equiv$  Ecke  $(1;0)^T$ ; die Basen 3, 4 und 5 gehören zur entarteten Ecke  $(0;1)^T$ .]

Es ergeben sich somit die folgenden Optimalkegel für die 5 zulässigen Basen:

Basis 1 ist optimal, wenn gilt:  $c_1 \leq 0 \wedge c_2 \leq 0$ .

Basis 2 ist optimal, wenn gilt:  $c_1 \geq 0 \wedge c_2 \leq c_1$ .

Basis 3 ist optimal, wenn gilt:  $c_2 \geq c_1 \wedge c_2 \geq 0$ .

Basis 4 ist optimal, wenn gilt:  $c_1 \geq 0 \wedge c_2 \geq c_1$ .

Basis 5 ist optimal, wenn gilt:  $c_1 \leq 0 \wedge c_2 \geq 0$ .

<sup>38</sup> Der Nullpunkt stellt in trivialer Weise einen Zielkoeffizientenvektor dar, für den alle Basen optimal sind.

<sup>39</sup> Ein ausgiebigeres Beispiel befindet sich im Anhang 7.

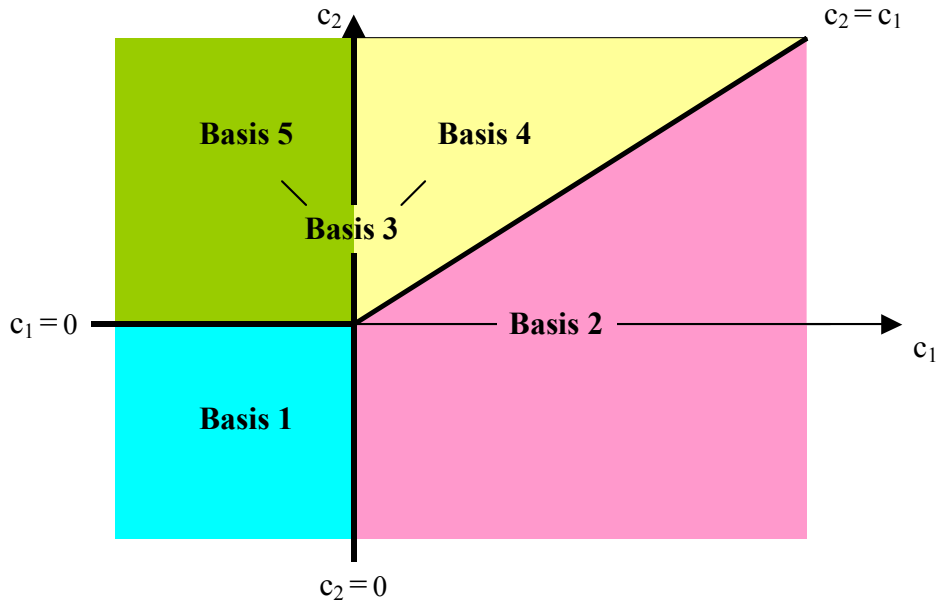


Abb. 8: Optimalkegel zum Beispiel 4

Der Optimalkegel  $K_1 = \{c \in \mathbb{R}^2 \mid c_1 \leq 0 \wedge c_2 \leq 0\}$  beschreibt die Optimalität der Ecke  $(0;0)^T$ ; entsprechend steht  $K_2 = \{c \in \mathbb{R}^2 \mid c_1 \geq 0 \wedge c_2 \leq c_1\}$  für die Optimalität der Ecke  $(1;0)^T$ . Der Optimalkegel  $K_4 = \{c \in \mathbb{R}^2 \mid c_2 \geq c_1 \wedge c_1 \geq 0\}$  entspricht der Optimalbasenmenge  $\{3,4\}$ ,  $K_5 = \{c \in \mathbb{R}^2 \mid c_1 \leq 0 \wedge c_2 \geq 0\}$  der Optimalbasenmenge  $\{3,5\}$ . Die Schnittmenge  $K_4 \cap K_5 = \{c \in \mathbb{R}^2 \mid c_1 = 0 \wedge c_2 \geq 0\}$  ist der Optimalbasenmenge  $\{3,4,5\}$  zuzuordnen. Damit sind alle Optimalbasenmengen und somit alle Optimumgraphen der entarteten Ecke  $x^0 = (0;1)^T$  erfasst. Der Optimalkegel zu Basis 3, also  $K_3 = \{c \in \mathbb{R}^2 \mid c_2 \geq c_1 \wedge c_2 \geq 0\}$ , ist gleichzeitig auch die Vereinigung aller Optimalkegel von  $x^0$  und definiert somit die Optimalität der entarteten Ecke. Die entartete Ecke besitzt 3 verschiedene Optimalbasenmengen bzw. Optimumgraphen (vgl. Abb. 9).

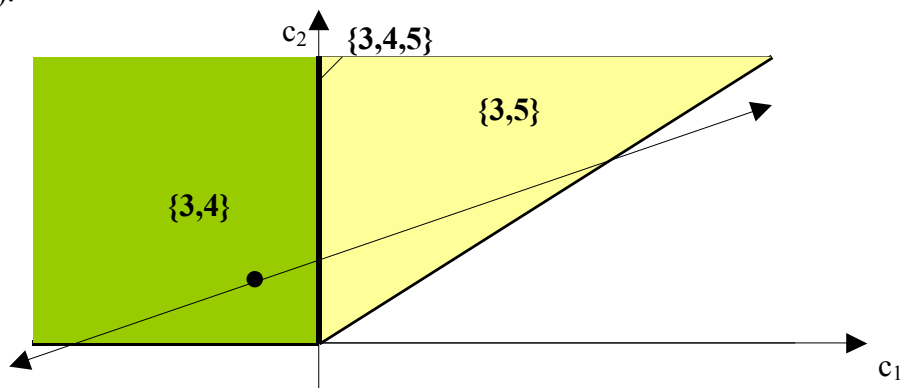
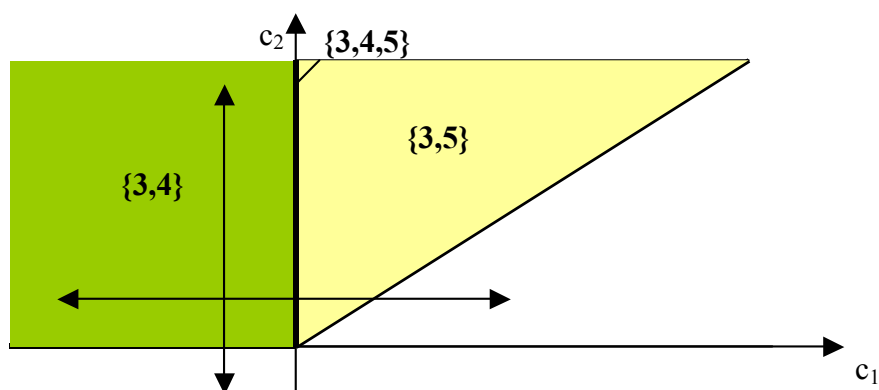


Abb. 9: Zusammenhang zwischen Schnittkegeln und Optimalbasenmengen zum Beispiel 4

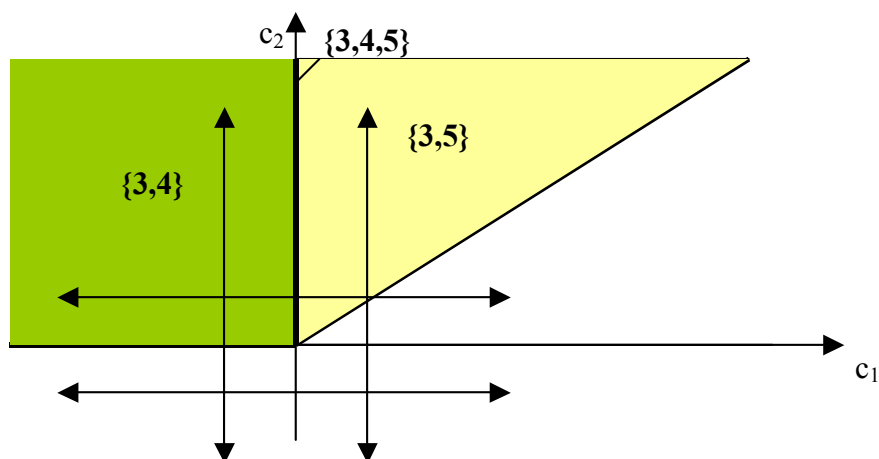
Die Bestimmung aller Optimalbasenmengen und somit aller Optimumgraphen könnte im obigen Beispiel unter Zuhilfenahme der Sensitivitätsanalyse erfolgen (vgl. Kap. 4). Ausgehend von einem geeignet ausgewählten Zielkoeffizientenvektor  $(c_1; c_2)^T$ , beispielsweise  $(-1;1)^T$ , und einem ebenfalls geeignet gewählten Richtungsvektor  $(v_1; v_2)^T$ , etwa  $v = (3;1)^T$ , in Richtung  $c \rightarrow \underline{c}(t) = c + t \cdot v$  eine „Richtungs-Optimalisierung“ vorgenommen, d.h. alle Sensitivitätsintervalle und die zugehörigen Übergänge zwischen den Optimalbasenmengen ermittelt werden (vgl. Abb. 9). Im obigen Beispiel ergeben sich die Übergänge  $\emptyset \leftrightarrow \{3,4\} \leftrightarrow \{3,4,5\} \leftrightarrow \{3,5\} \leftrightarrow \emptyset$  für  $-\infty \leq t \leq \infty$ .

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung aller Optimalbasismengen bietet die Hintereinanderausführung von zwei „partiellen Optimalisierungen“ an, d.h. ausgehend von einem geeignet ausgewählten Zielkoeffizientenvektor  $(c_1; c_2)^T$ , hier wiederum  $(-1; 1)^T$ , werden zwei spezielle „Richtungs-Optimalisierungen“ vorgenommen, und zwar in die Richtungen  $\mathbf{c} \rightarrow \underline{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{c} + t \cdot \mathbf{e}^1$  und  $\mathbf{c} \rightarrow \underline{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{c} + t \cdot \mathbf{e}^2$  (vgl. Abb. 10). Für das Beispiel ergeben sich die Übergänge  $\{3,4\} \leftrightarrow \{3,4,5\} \leftrightarrow \{3,5\} \leftrightarrow \emptyset$  bzw.  $\emptyset \leftrightarrow \{3,4\}$  für  $-\infty \leq t \leq \infty$ . Auch hierdurch werden sämtliche Übergänge von Optimalbasismengen erfasst.



**Abb. 10:** Übergänge der Optimalbasismengen zum Beispiel 4 bei partieller Optimalisierung

Bei beiden Verfahren zur Bestimmung aller Optimalbasismengen ist allerdings die Vorgabe eines geeigneten Zielkoeffizientenvektors  $(c_1; c_2)^T$  nötig, beim ersten Verfahren zudem noch eines geeigneten Richtungsvektors  $(v_1; v_2)^T$ , denn es ist sehr leicht einzusehen, dass nicht jede Vorgabe zur Bestimmung aller Optimalbasismengen führt.



**Abb. 11:** Allgemeine Vorgehensweise zur Bestimmung aller Optimalbasismengen

Im allgemeinen Fall ist die Lage der Optimalkegel allerdings nicht bekannt, sodass nicht von einer Vorgabe von geeigneten Ausgangspunkten auszugehen ist. Um dennoch mit 100%-iger Treffsicherheit alle Optimalbasismengen und deren Übergänge bestimmen zu können, wird vorgeschlagen, o.B.d.A. stets von den beiden Punkten  $(1; 1)^T$  und  $(-1; -1)^T$  auszugehen und jeweils zwei „partielle Optimalisierungen“ vorzunehmen, also

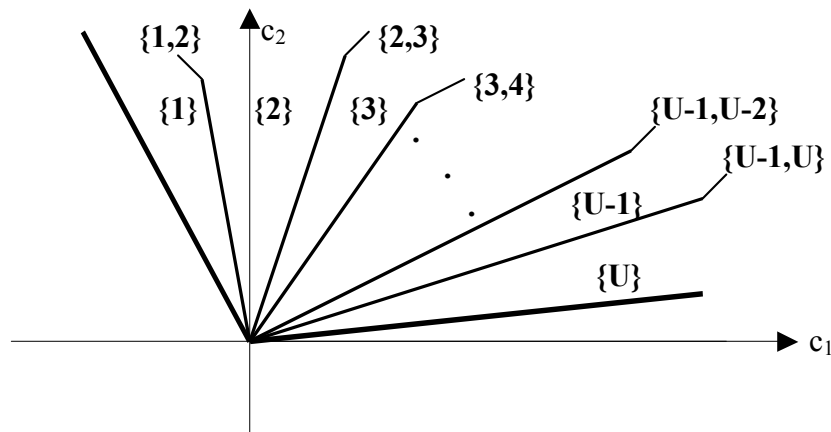
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1+t \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1+t \end{pmatrix} \text{ für } -\infty \leq t \leq \infty \text{ (vgl. Abb. 11).}$$

Für das Beispiel ergeben sich die Übergänge  $\{3,4\} \leftrightarrow \{3,4,5\} \leftrightarrow \{3,5\} \leftrightarrow \emptyset$  und  $\emptyset \leftrightarrow \{3,5\}$  sowie  $\emptyset$  und  $\emptyset \leftrightarrow \{3,5\}$  für  $-\infty \leq t \leq \infty$ . Hierdurch werden erst recht sämtliche Übergänge von Optimalbasismengen erfasst, wenn auch einige Richtungen keine wesentlichen Informationen liefern.

Da jede zulässige Basis eines zweidimensionalen LOP (d.h.  $n=2$ ) einen Kegel mit der Kegelspitze  $(0;0)^T$  aufspannt, wird durch das zuletzt vorgestellte Verfahren stets die Gesamtheit aller Optimalbasismengen und somit die Gesamtheit der durch sie induzierten Optimumgraphen ermittelt.

Schließlich soll noch die Frage nach der Anzahl  $O(2,\sigma)$  verschiedener Optimumgraphen einer  $\sigma$ -entartete Ecke  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$  eines LOP untersucht werden. Dabei werde angenommen, dass die Basismenge von  $\mathbf{x}^0$  gemäß (3) durch  $B^0 = \{B_u \mid u=1,\dots,U\}$  gegeben ist.

Eine grobe Abschätzung nach oben für die Anzahl  $O(2,\sigma)$  ergibt sich durch die folgende Überlegung. Jede Optimalbasismenge besitzt mindestens eine Basis  $B_u \in B^0$ . Der Extremfall, dass es  $U$  einelementige Optimalbasismengen und somit  $U$  verschiedene Optimalkegel gibt, ist in Abb. 12 skizziert. Zusätzlich zu den  $U$  einelementigen Optimalbasismengen gibt es  $U-1$  zweielementige Optimalbasismengen, die den Schnitten von jeweils zwei benachbarten Optimalkegel entsprechen<sup>40</sup>. Somit gibt es höchstens  $2U-1$  verschiedene Optimalbasismengen bzw. Optimumgraphen.



**Abb. 12:** Theoretische Obergrenze für  $O(2,\sigma)$

Hierbei handelt es sich allerdings um eine ebenso grobe wie theoretische Obergrenze, zumal dieser Fall im Allgemeinen nicht konstruierbar ist.

Anhand von Untersuchungen an weiteren Beispielen<sup>41</sup> ergibt sich eine scharfe obere Schranke  $O_{\max}(2,\sigma)$  für die Anzahl  $O(2,\sigma)$  verschiedener Optimumgraphen:

$$(26) \quad O(2,\sigma) \leq 2 \cdot U_{\max} - 1 - \sigma \cdot (\sigma + 1) =: O_{\max}(2,\sigma).$$

Durch einfache Umrechnung ergibt sich:

$$(27) \quad O_{\max}(2,\sigma) = 2 \cdot \sigma + 1.$$

<sup>40</sup> Unter benachbarten Optimalkegeln sei hier in Anlehnung an die graphische Veranschaulichung gemeint, dass der Schnitt der beiden Kegele einen Strahl ergeben.

<sup>41</sup> Hierzu siehe Anhang 7.

Der Nachweis für die Gültigkeit der Behauptungen (26) und (27) soll im Folgenden geführt werden:

Der Lösungsraum eines 2-dimensionalen LOP habe  $r$  Ecken  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^r$  und sei beschränkt (also ein konvexes Polyeder). Jeder Ecke  $\mathbf{x}^i$  ( $i=1, \dots, r$ ) ist auf kanonische Weise ein konvexer Kegel  $K(\mathbf{x}^i)$  zugewiesen, wobei für  $\mathbf{c}=(c_1, c_2)^T \in K(\mathbf{x}^i)$  gilt, dass  $\mathbf{x}^i$  optimale Ecke des LOP mit den Zielkoeffizienten  $c_1$  und  $c_2$ . Diese konvexen Kegel werden die **Optimalkegel der Ecken** des Lösungsraumes eines 2-dimensionalen LOP mit variablen Zielkoeffizienten genannt. Für die Vereinigung aller Optimalkegel gilt:

$$(28) \quad \bigcup_{i=1}^r K(\mathbf{x}^i) = \mathbb{R}^2.$$

Der Schnitt zweier Optimalkegel ist entweder die Nullpunktmenge  $\{\mathbf{0}\}$  oder ein Strahl  $S$  vom Nullpunkt aus (siehe Abb. 13).

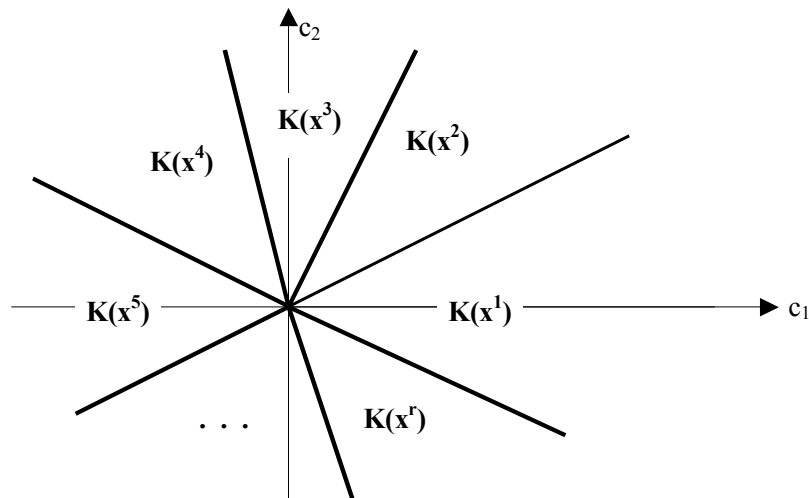


Abb. 13: Optimalkegel zu den Ecken eines konvexen Polyeders

Falls der Lösungsraum nicht beschränkt ist, d.h. „nur“ eine konvexe polyedrische Menge bildet, wird nicht der gesamte Punktraum  $\mathbb{R}^2$  durch  $r$  Optimalkegel, die den  $r$  Ecken des Lösungsraumes entsprechen, aufgespannt, vielmehr bleibt ein Kegel  $K_\infty$  der „unendlichen Ecke“ vorbehalten (siehe Abb. 14).

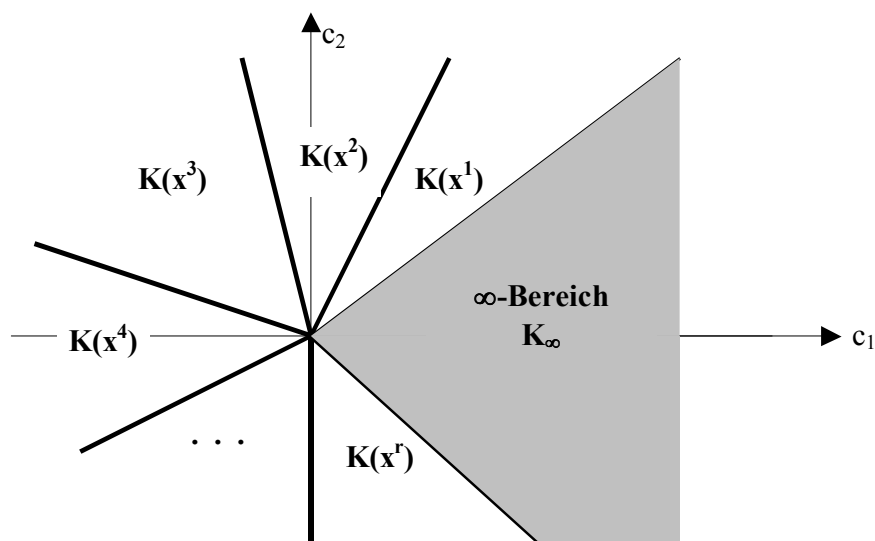
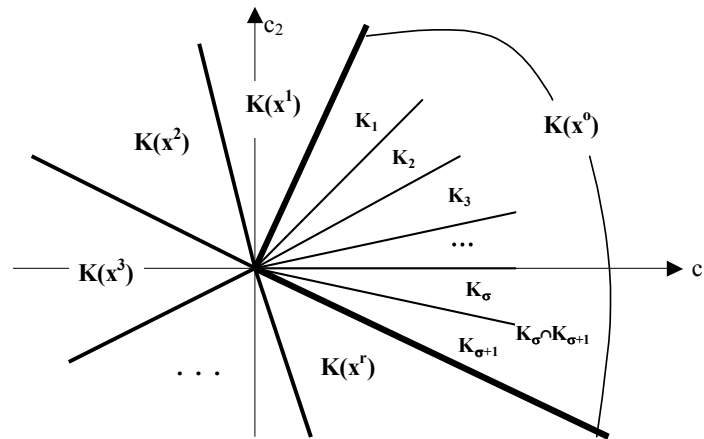


Abb. 14: Optimalkegel zu den Ecken einer konvexen polyedrischen Punktmenge

Falls eine Ecke  $x^0$   $\sigma$ -entartet ist, wird der zugehörige Optimalkegel  $K(x^0)$  durch die Bildung in genau  $\sigma+1$  verschiedene Schnittkegel  $K_1, \dots, K_{\sigma+1}$  aufgeteilt, falls die Restriktionsgeraden, welche die Ecke  $x^0$  (über-)bestimmen, verschieden sind (siehe Abb. 15). Die Vereinigung der Schnittkegel  $K_1, \dots, K_{\sigma+1}$  ist der Optimalkegel  $K(x^0)$ . Für jeweils zwei benachbarte Schnittkegel  $K_i$  und  $K_{i+1}$  gilt, dass deren Schnitt einen Strahl darstellt ( $i=1, \dots, \sigma$ ).



**Abb. 15:** Aufteilung eines Optimalkegels zur  $\sigma$ -entarteten Ecke  $x^0$  in  $\sigma+1$  Schnittkegel

Es ergeben sich  $2 \cdot \sigma + 1$  Möglichkeiten, die Schnittkegel  $K_1, \dots, K_{\sigma+1}$  zu konvexen Kegeln zu vereinigen<sup>42</sup>, nämlich

$K_1, K_2, K_3, \dots, K_{\sigma}, K_{\sigma+1}$	$\sigma+1$ Schnittkegel
$K_1 \cup K_2, K_2 \cup K_3, \dots, K_{\sigma} \cup K_{\sigma+1}$	$\sigma$ Kegel aus je 2 Schnittkegeln
$K_1 \cup K_2 \cup K_3, K_2 \cup K_3 \cup K_4, \dots, K_{\sigma-1} \cup K_{\sigma} \cup K_{\sigma+1}$	$\sigma-1$ Kegel aus je 3 Schnittkegeln
...	
$K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup \dots \cup K_{\sigma} \cup K_{\sigma+1}$	1 Kegel aus allen Schnittkegeln

Daraus ergeben sich  $U_{\max}$  verschiedene konvexe Kegel, denn es gilt<sup>43</sup>:

$$(\sigma+1) + \sigma + (\sigma-1) + \dots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^{\sigma+1} i = \frac{(\sigma+1) \cdot (\sigma+2)}{2} = \binom{\sigma+2}{\sigma} = U_{\max}.$$

Jeder dieser  $U_{\max}$  konvexen Vereinigungen<sup>44</sup> von Schnittkegeln entspricht umkehrbar eindeutig einer der  $U_{\max}$  Basen aus der Basenmenge  $B^0 = \{B_u \mid u=1, \dots, U_{\max}\}$  der  $\sigma$ -entarteten Ecke  $x^0$ .

Die Anzahl verschiedener Optimalbasenmengen (bzw. Optimumgraphen) ergibt sich dann auf kanonische Weise als  $2 \cdot \sigma + 1$ , denn diese entsprechen den  $\sigma+1$  Schnittkegeln  $K_1, \dots, K_{\sigma+1}$  sowie den  $\sigma$  Strahlen, die sich als Schnitte  $K_i \cap K_{i+1}$  von jeweils zwei benachbarten Schnittkegeln ergeben ( $i=1, \dots, \sigma$ ). Die Ungleichung (26) wird demnach als Gleichung erfüllt, d.h. für die Anzahl  $O(2, \sigma)$  verschiedener Optimumgraphen gilt:

$$(29) \quad O(2, \sigma) = 2\sigma + 1 = 2U_{\max} - 1 - \sigma \cdot (\sigma + 1).$$

Falls einige Restriktionsgeraden, welche die Ecke  $x^0$  (über-)bestimmen, identisch sind, wodurch lineare Abhängigkeiten in der technologischen Matrix  $A$  erzeugt werden, welche

<sup>42</sup> Man beachte, dass nur die Vereinigung von „benachbarten“ Kegeln, d.h. Kegeln, deren Schnitt einen Strahl bilden, wieder ein konvexer Kegel ist. Beispielsweise ist  $K_1 \cup K_3$  zwar ein Kegel, aber nicht konvex (vgl. Abb. 15).

<sup>43</sup> Die letzte Gleichheit gilt wegen Formel (4) mit  $n=2$ .

<sup>44</sup> Hierbei werden die ursprünglichen Kegel als „triviale“ Vereinigungen mitgezählt.

dazu führen, dass die Anzahl  $U$  der Basen der entarteten Ecke  $\mathbf{x}^0$  nicht maximal ausfällt (d.h.  $U < U_{\max}$ ), ergeben sich zwangsläufig weniger als  $\sigma+1$  konvexe Kegel, etwa  $K_1, \dots, K_\tau$  mit  $\tau < \sigma+1$ . Entsprechend ergeben sich  $2\tau-1$  verschiedene Optimumgraphen. Folgerichtig gilt die echte Ungleichung

$$(30) \quad O(2, \sigma) < 2\sigma+1 = 2U_{\max}-1-\sigma \cdot (\sigma+1).$$

Damit ist die Gültigkeit der Behauptungen (26) und (27) nachgewiesen.  $\blacklozenge$

Eine nahe liegende Vermutung, dass durch Ersetzen von  $U$  statt  $U_{\max}$  in Formel (26) eine schärfere Ungleichungsaussage allgemein gelten könnte, kann durch Gegenbeispiele widerlegt werden (hierzu siehe Anhang 7).

## 5.2. Gesamtheiten von Optimumgraphen im $\mathbb{R}^n$

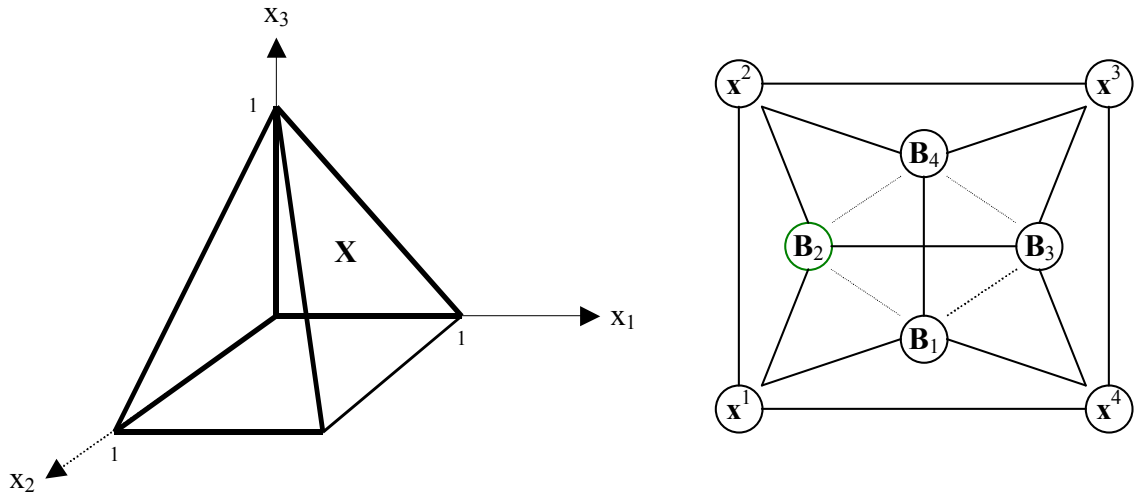
Gegeben sei eine  $\sigma$ -entartete Ecke  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$  des Lösungsraumes  $X$  eines LOP in der Form (1). Die Bereiche für  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , für die eine Ecke  $\mathbf{x} \in X$  bzw. eine Basis  $\mathbf{B}$  optimal ist, stellt einen konvexen Kegel des  $\mathbb{R}^n$  dar und werde ebenfalls als *Optimalkegel* von  $\mathbf{x}$  bzw. von  $\mathbf{B}$  bezeichnet:  $K(\mathbf{x})$  bzw.  $K(\mathbf{B})$ . Insbesondere interessieren hier wieder die Optimalkegel  $K(\mathbf{x}^0)$  bzw.  $K(\mathbf{B}_u)$ ,  $u=1, \dots, U$ .

Zur Bestimmung aller Optimumgraphen ist eine Übertragung der Überlegungen aus Abschn. 5.1 vom  $\mathbb{R}^2$  in den  $\mathbb{R}^n$  vorzunehmen. Die Optimalbasismengen entsprechen hier den nicht-trivialen Schnitten von Optimalkegeln  $K(\mathbf{B}_u)$ ,  $u=1, \dots, U$ , welche ihrerseits wieder konvexe Kegel im  $\mathbb{R}^k$  darstellen ( $k < n$ ) und als *Schnittkegel* bezeichnet werden. Da eine Veranschaulichung dieser Schnittkegel und ihrer Nachbarschaften bereits im  $\mathbb{R}^3$  schwierig (vgl. Beispiel 5 und Anhang 8) und im  $\mathbb{R}^n$  ( $n > 3$ ) unmöglich ist, ergeben sich entsprechende Schwierigkeiten für die Herleitung einer oberen Schranke  $O(n, \sigma)$  für den allgemeinen Fall  $n > 2$ . Hierzu betrachte man das folgende Beispiel.

### Beispiel 5:

Betrachte das LOP  $\max! c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3$  u.d.N.  $x_1 + x_3 \leq 1$ ,  $x_2 + x_3 \leq 1$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ . Der Lösungsraum  $X \subset \mathbb{R}^3$  stellt eine quadratische Pyramide dar (siehe Abb. 16) und besteht aus den nichtentarteten Ecken  $(0;0;0)^T$ ,  $(1;0;0)^T$ ,  $(0;1;0)^T$  und  $(1;1;0)^T$  sowie der entarteten Ecke  $(0;0;1)^T$  mit  $\sigma=1$  und  $U=4=U_{\max}$ . Die zugehörigen Simplextableaus sowie die grafische Darstellung des Darstellungs- bzw. Entartungsgraphen befinden sich im Anhang 8.





**Abb. 16:** Lösungsraum  $X$  und Darstellungsgraph  $G(X)$  des LOP von Beispiel 5

Für jede der 4 Basen  $\mathbf{B}_u$  zur 1-entarteten Ecke  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^3$  gehört ein Optimalkegel  $K(\mathbf{B}_u)$ , der von jeweils drei (Hyper-)Ebenen begrenzt wird ( $u=1, \dots, 4$ ):

$$K(\mathbf{B}_1) = \{(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{c}_2 \leq 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_1\},$$

$$K(\mathbf{B}_2) = \{(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{c}_1 \leq 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_2\},$$

$$K(\mathbf{B}_3) = \{(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{c}_1 \geq 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_1 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\},$$

$$K(\mathbf{B}_4) = \{(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{c}_2 \geq 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_2 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\}.$$

Zwecks Ermittlung aller Optimumgraphen sind sämtliche Schnittkegel bzgl.  $\mathbf{x}^0$  zu bestimmen, d.h. alle nichttrivialen Schnitte aus den obigen Optimalkegeln. Es ergeben sich insgesamt 9 verschiedene Schnittkegel, die zu 9 unterschiedlichen Optimalbasismengen bzw. Optimumgraphen von  $\mathbf{x}^0$  gehören (vgl. Anhang 8).

Dieses Ergebnis passt zu der folgenden Vermutung über eine scharfe obere Schranke  $O_{\max}(n, \sigma)$  für die Anzahl verschiedener Optimumgraphen im allgemeinen Fall  $n > 2$ :

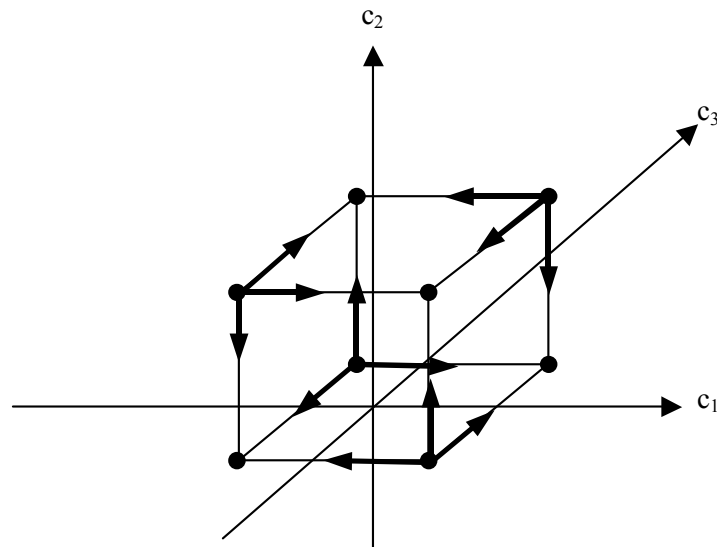
$$(31) \quad O(n, \sigma) \leq O_{\max}(n, \sigma) := n \cdot U_{\max} - 1 - \sigma \cdot (\sigma + 1).$$

Dieser vermutete und an verschiedenen Beispielen überprüfte Sachverhalt ist mit Formel (26) kompatibel. Allerdings steht der explizite Nachweis für die Allgemeingültigkeit dieser Behauptung noch aus; er ist daher weiteren Untersuchungen an Optimumgraphen vorbehalten (vgl. Kapitel 6).

Abschließend wird noch ein Verfahren zur Ermittlung aller Optimumgraphen vorgeschlagen. Es entspricht einer kanonischen Verallgemeinerung der Verfahrensidee aus Abschn. 5.1 für den Fall  $n=2$ . Dort werden an zwei Punkten des  $\mathbb{R}^2$  jeweils zwei einparametrische Sensitivitätsanalysen vorgenommen, und zwar o.B.d.A. an den Punkten  $(1;1)^T$  und  $(-1;-1)^T$  jeweils in  $c_1$ - und  $c_2$ -Richtung. Dabei werden sämtliche Optimalbasismengen und die dadurch induzierten Optimumgraphen erfasst (vgl. Abb. 11).

In analoger Weise werden im Falle  $n=3$  vier Punkte des  $\mathbb{R}^3$  ausgewählt und an ihnen jeweils drei einparametrische Sensitivitätsanalysen vorgenommen, und zwar o.B.d.A. an den Punkten  $(1;1;1)^T$ ,  $(-1;-1;1)^T$ ,  $(1;-1;-1)^T$ , und  $(-1;1;-1)^T$  jeweils in  $c_1$ -,  $c_2$ - und  $c_3$ -Richtung. Die Auswahl der Punkte erfolgt ausgehend von der Würfecke  $(1;1;1)^T$  entlang der Flächendiagonalen, also durch Fixierung jeweils einer Koordinate ( $c_1=1$  bzw.  $c_2=1$  bzw.  $c_3=1$ ) und Änderung der

übrigen Koordinaten von 1 in -1. Dabei werden wiederum sämtliche Optimalbasismengen und die dadurch induzierten Optimumgraphen erfasst (vgl. Abb. 17).



**Abb. 17:** Vorgehensweise zur Bestimmung aller Optimalbasismengen im Falle  $n=3$

Im allgemeinen Fall sind  $2^{n-1}$  geeignete Punkte auszuwählen<sup>45</sup> und an ihnen einparametrische Sensitivitätsanalysen in alle  $c_j$ -Richtungen auszuführen ( $j=1, \dots, n$ ). Im Verlaufe der  $n \cdot 2^{n-1}$  Teilschritte werden sämtliche Optimumgraphen ermittelt. Allerdings zeigt die Anzahl der Teilschritte bereits an, dass es sich um ein Verfahren mit nicht-polynomialem Rechenzeitverhalten handelt.

## 6. Ausblick

Es wurde eine Vielzahl von noch offenen Fragen aus dem Bereich der Optimumgraphen aufgeworfen, insbesondere in den Kapiteln 4 und 5. Hiervon soll an dieser Stelle exemplarisch nur ein Fragenkomplex wieder aufgegriffen werden, zumal geplant ist, diese speziellen Fragestellungen im kommenden Studienjahr in den Mittelpunkt eines Projektseminars des Bachelor-Studienganges *Angewandte Mathematik* zu stellen und zudem in Bachelor- und Master-Arbeiten<sup>46</sup> behandeln zu lassen.

Konkret geht es um die Frage, wie sich möglichst einfach und effizient die Repräsentanten für die Optimalität einer entarteten Polyederecke (also jene Basen, deren Sensitivitätsintervalle bzgl. eines bestimmten Zielkoeffizienten die Sensitivitätsintervalle aller sonstigen Elemente der Basismenge der entarteten Ecke überdeckt; vgl. Kap. 4) durch ein geeignetes A-priori-Kriterium an den jeweiligen Simplextableaus nachweisen lassen. Ist ein solches Kriterium anzugeben, stellt sich in der Folge die Frage, wie sich Repräsentanten im jeweiligen Optimumgraph effizient finden lassen. Während sich ein Repräsentant per Definition auf *einen* vorgegebenen Zielkoeffizienten bezieht, stellt sich dann noch die vorläufig letzte Frage, wie die verschiedenen Repräsentanten aller Zielkoeffizienten im Optimumgraphen angeordnet sind, um daraus Rückschlüsse auf ein effizientes Auffinden ihrer Gesamtheit ziehen zu können. Mit diesem Wissen dürfte sich dann in vielversprechender Weise ein Verfahren zur Bestimmung aller Optimalbereiche einer entarteten Ecke eines linearen Optimierungsproblems entwickeln lassen.

<sup>45</sup> Das Auswahlverfahren für den Fall  $n=3$  wird auf kanonische Weise auf den Fall  $n>3$  verallgemeinert.

<sup>46</sup> Letztere im Master-Studiengang *Optimierung & Simulation* der Fachhochschule Bielefeld.

## Literatur

- Agkül M (1984)** *A note on shadow prices in linear programming*. Journal of Operational Research Society 35, 425-431.
- Aucamp DG, Steinberg DI (1982)** *The computation of shadow prices in linear programming*. Journal of Operational Research Society 35, 557-565.
- Beale EML (1955)** *Cycling in the dual simplex algorithm*. Naval Research Logistics Quarterly 2, 269-276.
- Bland RG (1977)** *New finite pivoting rules for the simplex method*. Mathematics of Operations Research 2, 103-107.
- Charnes A (1952)** *Optimality and degeneracy in linear programming*. Econometrica 20, 160-170.
- Dantzig GB, Orden A, Wolfe P (1955)** *The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints*. Pacific Journal of Mathematics 5, 183-195.
- Evans JR, Baker NR (1982)** *Degeneracy and the (mis)-interpretation of sensitivity analysis in linear programming*. Decision Sciences 13, 348-354.
- Gal T (1985)** *On the structure of the set bases of a degenerate point*. Journal of Optimization Theory and Application 45, 577-589.
- Gal T (1986)** *Shadow prices and sensitivity analysis in linear programming under degeneracy – state-of-the-art-survey*. OR Spektrum 8, 59-71.
- Gal T (1990)** *Degeneracy graphs – a survey*. Operations Research Proceedings 1989, Berlin Heidelberg New York 1990; 499-506.
- Gal T (1993)** *Degeneracy graphs: theory and application – an updated survey*. Annals of Operations Research 46, 81-105.
- Gal T, Kruse H-J (1985)** *Ein Verfahren zur Lösung des Nachbarschaftsproblems*. Operations Research Proceedings 1984, Berlin Heidelberg New York 1985; 447-454.
- Gal T, Kruse H-J, Zörnig P (1986)** *New developments in the area of degeneracy graphs*. Diskussionsbeitrag Nr. 102, Fachbereich Wirtschaftswissenschaft der FernUniversität Hagen.
- Gal T, Kruse H-J, Zörnig P (1988)** *Survey of solved and open problems in the degeneracy phenomenon*. Mathematical Programming, Series B 42, 125-133.
- Geue F (1993)** *An improved N-tree method to determine all neighbors of a degenerate vertex*. Annals of Operations Research 47, 361-391.
- Greenberg HJ (1986)** *An analysis of degeneracy*. Naval Research Logistics Quarterly 33, 635-655.
- Hoffman AJ (1953)** *Cycling in the simplex algorithm*. National Bureau of Standards Report 2974.
- Knolmayer G (1976)** *How many sides are shadow prices at degenerate primal optima?* OMEGA 4, 493-494.
- Knolmayer G (1984)** *The effects of degeneracy on cost-coefficient ranges and an algorithm to resolve interpretation problems*. Decision Sciences 15, 14-21.
- Knolmayer G, Klöbel M (1992)** *Heuristics for determining a minimal set of informative nodes in the optimum degeneracy graph*. Operations Research Proceedings 1990, Berlin Heidelberg New York 1992.
- Knolmayer G, Stühr K-P (1990)** *Bounds on the aggregation error in case of primal degeneracy*. Operations Research Proceedings 1989, Berlin Heidelberg New York 1990; 513-521.

- Kruse H-J (1986)** *Degeneracy graphs and the neighbourhood problem*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 260; Berlin Heidelberg New York.
- Kruse H-J (1987)** *Über spezielle Teilgraphen von Entartungsgraphen*. Diskussionsbeitrag Nr. 121, Fachbereich Wirtschaftswissenschaft der FernUniversität Hagen.
- Kruse H-J (1993)** *On some properties of o-degeneracy graphs*. Annals of Operations Research 47, 393-408.
- Nieuwenhuizen T (2003)** *Schattenpreise in der linearen Optimierung*. Herzogenrath 2003.
- Piehler G (1990)** *Postoptimale Analyse für entartete lineare Optimierungsprobleme*. Operations Research Proceedings 1989, Berlin Heidelberg New York 1990; 521-528.
- Piehler G, Kruse H-J (1989)** *Optimumgraphen zur Analyse linearer Optimierungsprobleme unter Entartung*. Operations Research Proceedings 1988, Berlin Heidelberg New York 1989; 205-210.
- Zörnig P (1991)** *Degeneracy graphs and simplex cycling*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 357; Berlin Heidelberg New York.
- Zörnig P (1993)** *A theory of degeneracy graphs*. Annals of Operations Research 47, 541-556.
- Zörnig P, Gal T (1996)** *On the connectedness of optimum-degeneracy graphs*. European Journal of Operational Research 95, 155-166.

## Anhang:

<b>Anhang 1: Pivottableaus zum Beispiel 1</b>	2
<b>Anhang 2: Entartungsgraphen zum Beispiel 1</b>	4
<b>Anhang 3: Simplextableaus zum Beispiel 2</b>	6
<b>Anhang 4: Positive und negative Entartungsgraphen zum Beispiel 2</b>	9
<b>Anhang 5: Simplextableaus zum Beispiel 3</b>	15
<b>Anhang 6: Simplextableaus zum modifizierten Beispiel 3 (<math>c_2 = 5</math>)</b>	19
<b>Anhang 7: Verallgemeinerungen zum Beispiel 4</b>	22
<b>Anhang 8: Ausführungen zum Beispiel 5</b>	27

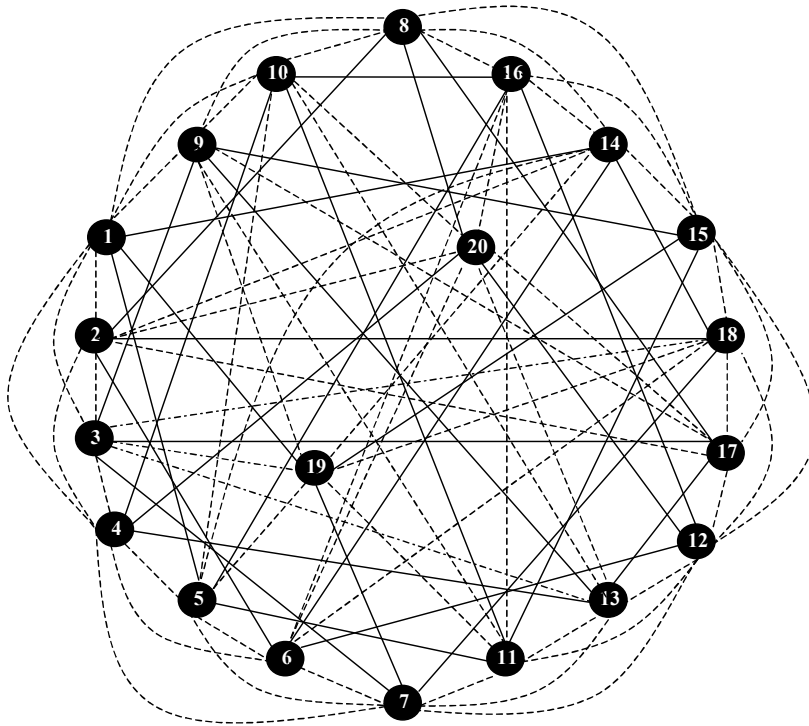
### Anhang 1: Pivottableaus zum Beispiel 1

BV-Index	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub> (S <sub>1</sub> )	x <sub>5</sub> (S <sub>2</sub> )	x <sub>6</sub> (S <sub>3</sub> )	x <sub>7</sub> (S <sub>4</sub> )	x <sub>B</sub>	Basis Nr.
2	0	1	0,25	0,25	0	0	0	1	<b>1</b>
5	1	0	-0,25	-1,25	1	0	0	0	
6	1	0	-0,5	-0,5	0	1	0	0	
7	1	0	-1,25	-0,25	0	0	1	0	
2	0,2	1	0,2	0	0,2	0	0	1	<b>2</b>
4	-0,8	0	0,2	1	-0,8	0	0	0	
6	0,6	0	-0,4	0	-0,4	1	0	0	
7	0,8	0	-1,2	0	-0,2	0	1	0	
2	0,5	1	0	0	0	0,5	0	1	<b>3</b>
4	-2	0	1	1	0	-2	0	0	
5	-1,5	0	1	0	1	-2,5	0	0	
7	0,5	0	-1	0	0	-0,5	1	0	
2	1	1	-1	0	0	0	1	1	<b>4</b>
4	-4	0	5	1	0	0	-4	0	
5	-4	0	6	0	1	0	-5	0	
6	-1	0	2	0	0	1	-2	0	
1	1	0	-1,25	-0,25	0	0	1	0	<b>5</b>
2	0	1	0,25	0,25	0	0	0	1	
5	0	0	1	-1	1	0	-1	0	
6	0	0	0,75	-0,25	0	1	-1	0	
1	1	0	-1,5	0	-0,25	0	1,25	0	<b>6</b>
2	0	1	0,5	0	0,25	0	-0,25	1	
4	0	0	-1	1	-1	0	1	0	
6	0	0	0,5	0	-0,25	1	-0,75	0	
1	1	0	-2	0	0	-1	2	0	<b>7</b>
2	0	1	1	0	0	1	-1	1	
4	0	0	-3	1	0	-4	4	0	
5	0	0	-2	0	1	-4	3	0	
2	1	1	0	-1	1	0	0	1	<b>8</b>
3	-4	0	1	5	-4	0	0	0	
6	-1	0	0	2	-2	1	0	0	
7	-4	0	0	6	-5	0	1	0	
2	0,5	1	0	0	0	0,5	0	1	<b>9</b>
3	-2	0	1	1	0	-2	0	0	
5	0,5	0	0	-1	1	-0,5	0	0	
7	-1,5	0	0	1	0	-2,5	1	0	
2	0,2	1	0	0,2	0	0	0,2	1	<b>10</b>
3	-0,8	0	1	0,2	0	0	-0,8	0	
5	0,8	0	0	-1,2	1	0	-0,2	0	
6	0,6	0	0	-0,4	0	1	-0,4	0	
1	1	0	0	-0,667	0	1,667	-0,667	0	<b>11</b>
2	0	1	0	0,333	0	-0,333	0,333	1	
3	0	0	1	-0,333	0	1,333	-1,333	0	
5	0	0	0	-0,667	1	-1,333	0,333	0	
1	1	0	0	0	-1	3	-1	0	<b>12</b>
2	0	1	0	0	0,5	-1	0,5	1	
3	0	0	1	0	-0,5	2	-1,5	0	
4	0	0	0	1	-1,5	2	-0,5	0	

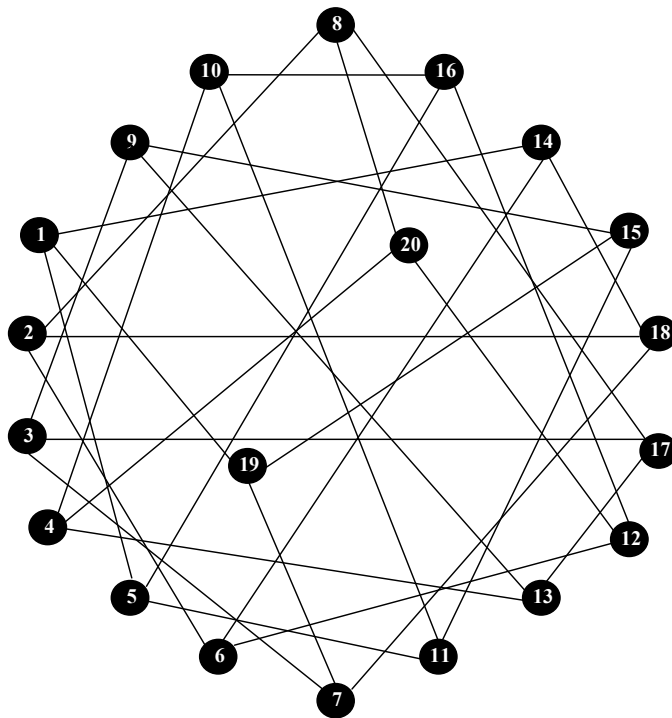
BV-Index	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub> (S <sub>1</sub> )	x <sub>5</sub> (S <sub>2</sub> )	x <sub>6</sub> (S <sub>3</sub> )	x <sub>7</sub> (S <sub>4</sub> )	x <sub>B</sub>	Basis Nr.
2	0,5	1	0	0	0	0,5	0	1	<b>13</b>
3	-0,5	0	1	0	0	0,5	-1	0	
4	-1,5	0	0	1	0	-2,5	1	0	
5	-1	0	0	0	1	-3	1	0	
1	1	0	-0,25	-1,25	1	0	0	0	<b>14</b>
2	0	1	0,25	0,25	0	0	0	1	
6	0	0	-0,25	0,75	-1	1	0	0	
7	0	0	-1	1	-1	0	1	0	
1	1	0	0	-2	2	-1	0	0	<b>15</b>
2	0	1	0	1	-1	1	0	1	
3	0	0	1	-3	4	-4	0	0	
7	0	0	0	-2	3	-4	1	0	
1	1	0	0	-1,5	1,25	0	-0,25	0	<b>16</b>
2	0	1	0	0,5	-0,25	0	0,25	1	
3	0	0	1	-1	1	0	-1	0	
6	0	0	0	0,5	-0,75	1	-0,25	0	
2	0,5	1	0	0	0	0,5	0	1	<b>17</b>
3	-1,5	0	1	0	1	-2,5	0	0	
4	-0,5	0	0	1	-1	0,5	0	0	
7	-1	0	0	0	1	-3	1	0	
1	1	0	-0,667	0	-0,667	1,667	0	0	<b>18</b>
2	0	1	0,333	0	0,333	-0,333	0	1	
4	0	0	-0,333	1	-1,333	1,333	0	0	
7	0	0	-0,667	0	0,333	-1,333	1	0	
1	1	0	-0,5	-0,5	0	1	0	0	<b>19</b>
2	0	1	0,25	0,25	0	0	0	1	
5	0	0	0,25	-0,75	1	-1	0	0	
7	0	0	-0,75	0,25	0	-1	1	0	
2	0,333	1	0	0	0,167	0	0,167	1	<b>20</b>
3	-0,667	0	1	0	0,167	0	-0,833	0	
4	-0,667	0	0	1	-0,833	0	0,167	0	
6	0,333	0	0	0	-0,333	1	-0,333	0	

## Anhang 2: Entartungsgraphen zum Beispiel 1

Der allgemeine Entartungsgraph der entarteten Ecke  $x^0$ :

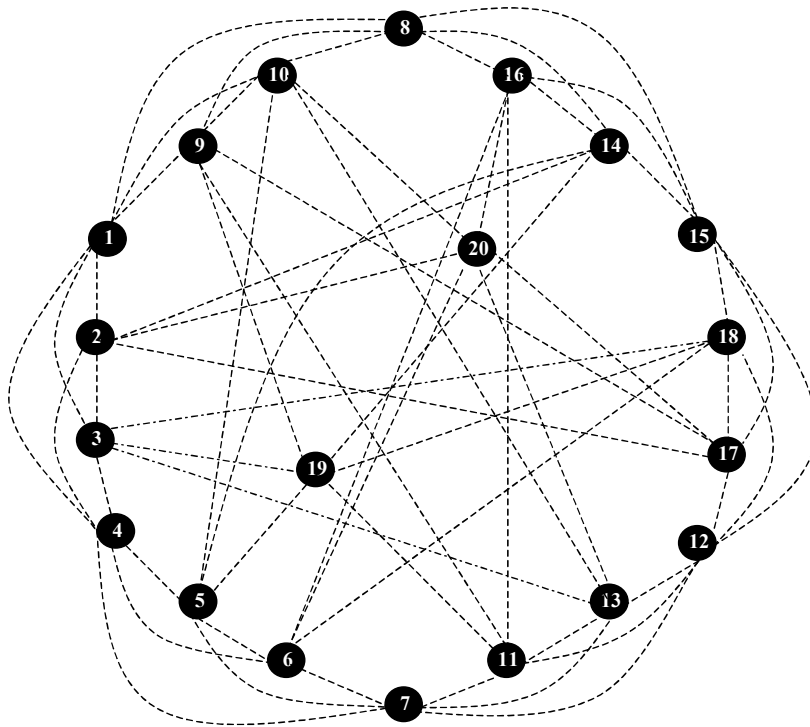


Der positive Entartungsgraph der entarteten Ecke  $x^0$ :





Der negative Entartungsgraph der entarteten Ecke  $x^0$ :



### Anhang 3: Simplextableaus zum Beispiel 2

$c_j$	2	20	4	0	0	0	0		
BV-Index	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4 (s_1)$	$x_5 (s_2)$	$x_6 (s_3)$	$x_7 (s_4)$	$x_B$	Basis-Nr.
2	0	1	0,25	0,25	0	0	0	1	<b>1</b>
5	1	0	-0,25	-1,25	1	0	0	0	
6	1	0	-0,5	-0,5	0	1	0	0	
7	1	0	-1,25	-0,25	0	0	1	0	
$\Delta z_j$	-2	0	1	5	0	0	0	20	
2	0,2	1	0,2	0	0,2	0	0	1	<b>2</b>
4	-0,8	0	0,2	1	-0,8	0	0	0	
6	0,6	0	-0,4	0	-0,4	1	0	0	
7	0,8	0	-1,2	0	-0,2	0	1	0	
$\Delta z_j$	2	0	0	0	4	0	0	20	<b>OPT</b>
2	0,5	1	0	0	0	0,5	0	1	<b>3</b>
4	-2	0	1	1	0	-2	0	0	
5	-1,5	0	1	0	1	-2,5	0	0	
7	0,5	0	-1	0	0	-0,5	1	0	
$\Delta z_j$	8	0	-4	0	0	10	0	20	
2	1	1	-1	0	0	0	1	1	<b>4</b>
4	-4	0	5	1	0	0	-4	0	
5	-4	0	6	0	1	0	-5	0	
6	-1	0	2	0	0	1	-2	0	
$\Delta z_j$	18	0	-24	0	0	0	20	20	
1	1	0	-1,25	-0,25	0	0	1	0	<b>5</b>
2	0	1	0,25	0,25	0	0	0	1	
5	0	0	1	-1	1	0	-1	0	
6	0	0	0,75	-0,25	0	1	-1	0	
$\Delta z_j$	0	0	-1,5	4,5	0	0	2	20	
1	1	0	-1,5	0	-0,25	0	1,25	0	<b>6</b>
2	0	1	0,5	0	0,25	0	-0,25	1	
4	0	0	-1	1	-1	0	1	0	
6	0	0	0,5	0	-0,25	1	-0,75	0	
$\Delta z_j$	0	0	3	0	4,5	0	-2,5	20	
1	1	0	-2	0	0	-1	2	0	<b>7</b>
2	0	1	1	0	0	1	-1	1	
4	0	0	-3	1	0	-4	4	0	
5	0	0	-2	0	1	-4	3	0	
$\Delta z_j$	0	0	12	0	0	18	-16	20	
2	1	1	0	-1	1	0	0	1	<b>8</b>
3	-4	0	1	5	-4	0	0	0	
6	-1	0	0	2	-2	1	0	0	
7	-4	0	0	6	-5	0	1	0	
$\Delta z_j$	2	0	0	0	4	0	0	20	<b>OPT</b>
2	0,5	1	0	0	0	0,5	0	1	<b>9</b>
3	-2	0	1	1	0	-2	0	0	
5	0,5	0	0	-1	1	-0,5	0	0	
7	-1,5	0	0	1	0	-2,5	1	0	
$\Delta z_j$	0	0	0	4	0	2	0	20	<b>OPT</b>

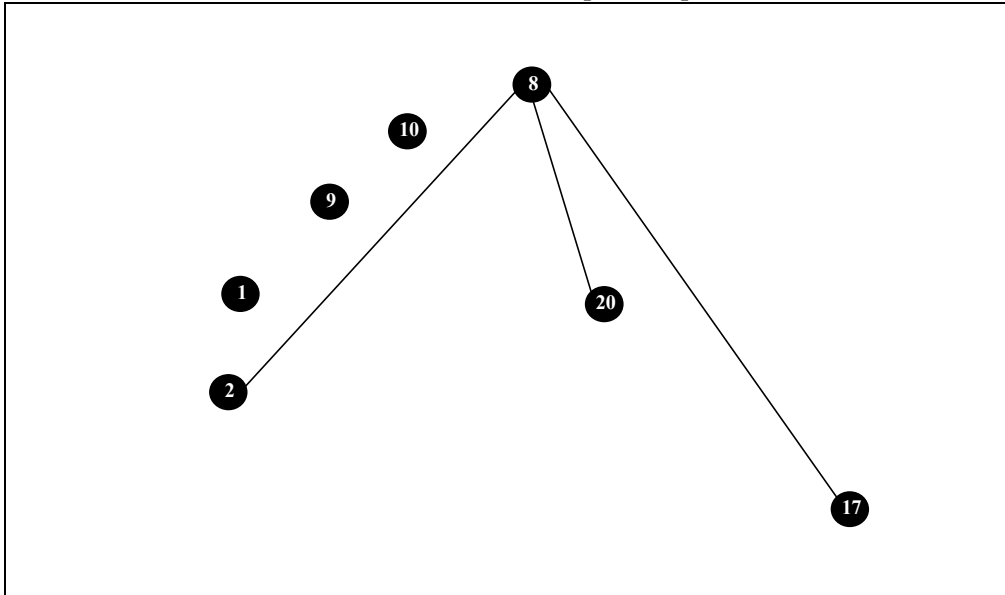
c <sub>j</sub>	2	20	4	0	0	0	0		
BV-Index	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub> (s <sub>1</sub> )	x <sub>5</sub> (s <sub>2</sub> )	x <sub>6</sub> (s <sub>3</sub> )	x <sub>7</sub> (s <sub>4</sub> )	x <sub>B</sub>	Basis-Nr.
2	0,2	1	0	0,2	0	0	0,2	1	<b>10</b>
3	-0,8	0	1	0,2	0	0	-0,8	0	
5	0,8	0	0	-1,2	1	0	-0,2	0	
6	0,6	0	0	-0,4	0	1	-0,4	0	
Δz <sub>j</sub>	-1,2	0	0	4,8	0	0	0,8	20	
1	1	0	0	-0,667	0	1,667	-0,667	0	<b>11</b>
2	0	1	0	0,333	0	-0,333	0,333	1	
3	0	0	1	-0,333	0	1,333	-1,333	0	
5	0	0	0	-0,667	1	-1,333	0,333	0	
Δz <sub>j</sub>	0	0	0	4,000	0	2,000	0,000	20	<b>OPT</b>
1	1	0	0	0	-1	3	-1	0	<b>12</b>
2	0	1	0	0	0,5	-1	0,5	1	
3	0	0	1	0	-0,5	2	-1,5	0	
4	0	0	0	1	-1,5	2	-0,5	0	
Δz <sub>j</sub>	0	0	0	0	6	-6	2	20	
2	0,5	1	0	0	0	0,5	0	1	<b>13</b>
3	-0,5	0	1	0	0	0,5	-1	0	
4	-1,5	0	0	1	0	-2,5	1	0	
5	-1	0	0	0	1	-3	1	0	
Δz <sub>j</sub>	6	0	0	0	0	12	-4	20	
1	1	0	-0,25	-1,25	1	0	0	0	<b>14</b>
2	0	1	0,25	0,25	0	0	0	1	
6	0	0	-0,25	0,75	-1	1	0	0	
7	0	0	-1	1	-1	0	1	0	
Δz <sub>j</sub>	0	0	0,5	2,5	2	0	0	20	<b>OPT</b>
1	1	0	0	-2	2	-1	0	0	<b>15</b>
2	0	1	0	1	-1	1	0	1	
3	0	0	1	-3	4	-4	0	0	
7	0	0	0	-2	3	-4	1	0	
Δz <sub>j</sub>	0	0	0	4	0	2	0	20	<b>OPT</b>
1	1	0	0	-1,5	1,25	0	-0,25	0	<b>16</b>
2	0	1	0	0,5	-0,25	0	0,25	1	
3	0	0	1	-1	1	0	-1	0	
6	0	0	0	0,5	-0,75	1	-0,25	0	
Δz <sub>j</sub>	0	0	0	3	1,5	0	0,5	20	<b>OPT</b>
2	0,5	1	0	0	0	0,5	0	1	<b>17</b>
3	-1,5	0	1	0	1	-2,5	0	0	
4	-0,5	0	0	1	-1	0,5	0	0	
7	-1	0	0	0	1	-3	1	0	
Δz <sub>j</sub>	2	0	0	0	4	0	0	20	<b>OPT</b>
1	1	0	-0,667	0	-0,667	1,667	0	0	<b>18</b>
2	0	1	0,333	0	0,333	-0,333	0	1	
4	0	0	-0,333	1	-1,333	1,333	0	0	
7	0	0	-0,667	0	0,333	-1,333	1	0	
Δz <sub>j</sub>	0	0	1,333	0	5,333	-3,333	0	20	

$c_j$	<b>2</b>	<b>20</b>	<b>4</b>	0	0	0	0		
<b>BV-Index</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4 (s_1)$	$x_5 (s_2)$	$x_6 (s_3)$	$x_7 (s_4)$	$x_B$	<b>Basis-Nr.</b>
1	1	0	-0,5	-0,5	0	1	0	0	<b>19</b>
2	0	1	0,25	0,25	0	0	0	1	
5	0	0	0,25	-0,75	1	-1	0	0	
7	0	0	-0,75	0,25	0	-1	1	0	
$\Delta z_j$	0	0	0	4	0	2	0	20	<b>OPT</b>
2	0,333	1	0	0	0,167	0	0,167	1	<b>20</b>
3	-0,667	0	1	0	0,167	0	-0,833	0	
4	-0,667	0	0	1	-0,833	0	0,167	0	
6	0,333	0	0	0	-0,333	1	-0,333	0	
$\Delta z_j$	2,000	0	0	0	4,000	0	0	20	<b>OPT</b>

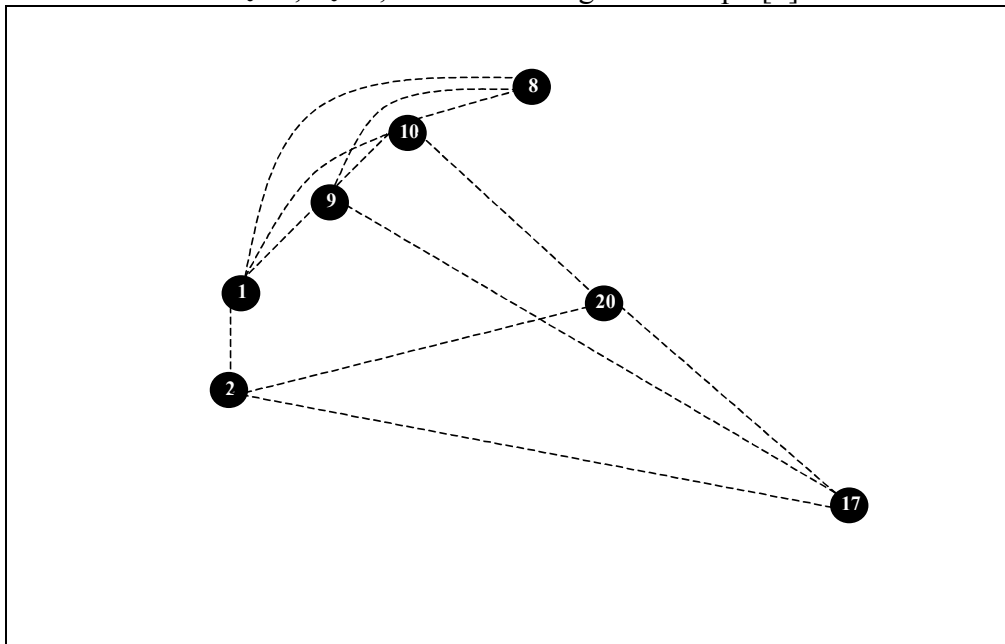
#### Anhang 4: Positive und negative Entartungsgraphen zum Beispiel 2

Legende:  $U_c \equiv$  Anzahl der Knoten (Mächtigkeit der Optimalbasenmenge)  
 $Z_c \equiv$  Anzahl der Zusammenhangskomponenten  
Graphentyp [Knotenanzahl pro Zusammenhangskomponente];

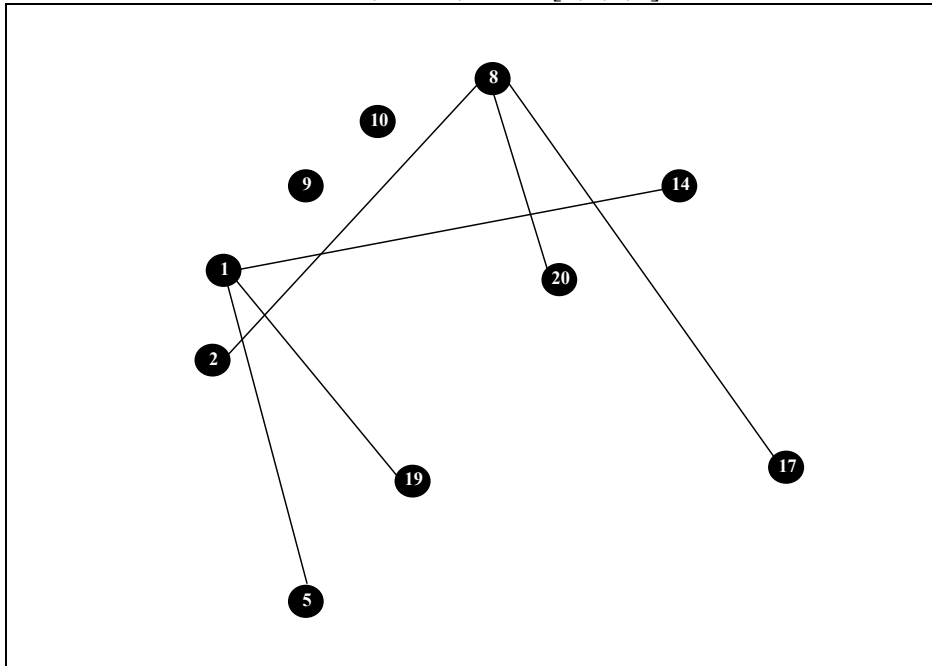
Positiver Optimumgraph von  $x^0$  bzgl.  $c=(-1;20;4)^T$ :  
 $U_c=7, Z_c=4$ ; Wald [4,1,1,1]



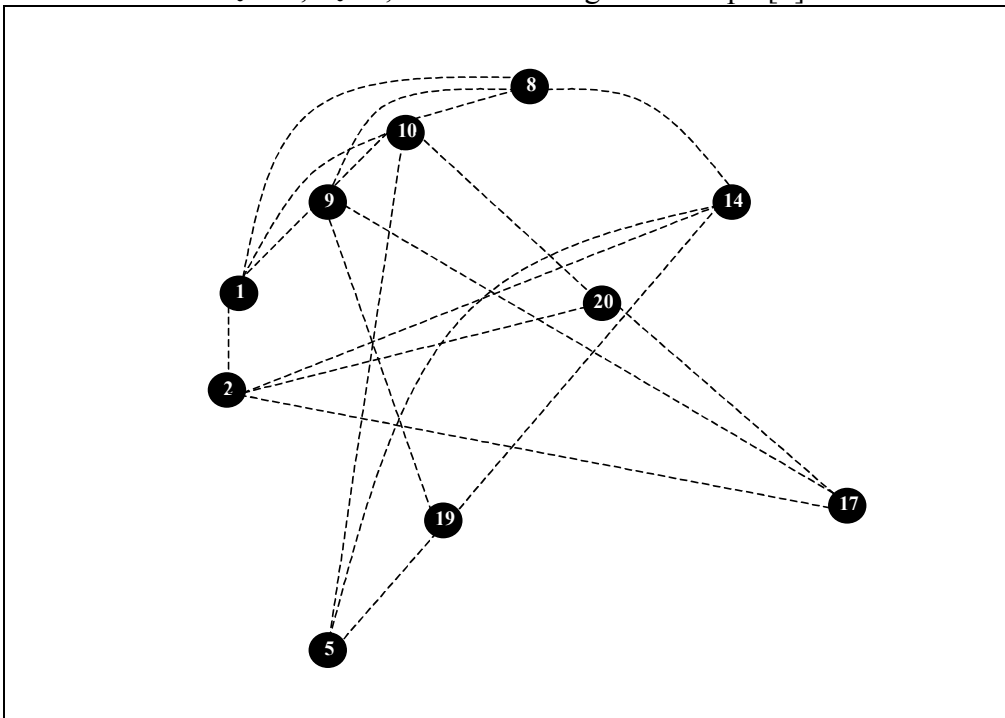
Negativer Optimumgraph von  $x^0$  bzgl.  $c=(-1;20;4)^T$ :  
 $U_c=7, Z_c=1$ ; zusammenhängender Graph [1]



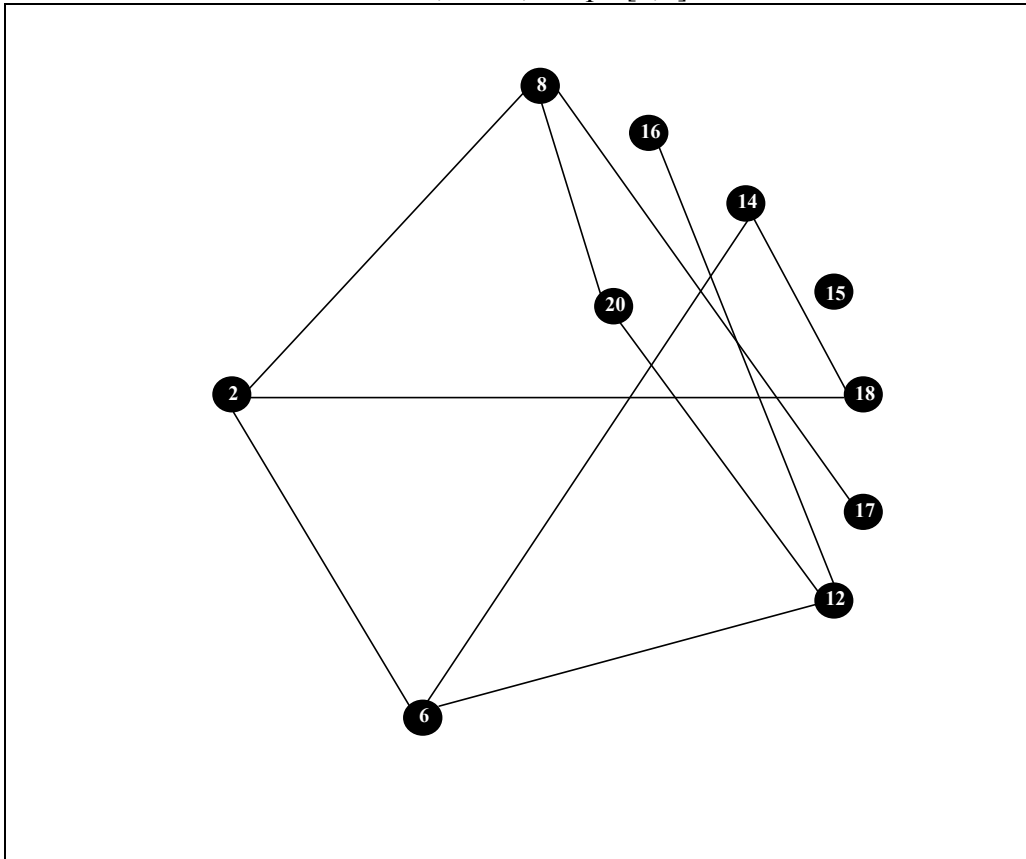
Positiver Optimumgraph von  $x^0$  bzgl.  $c=(0;20;4)$ :  
 $U_c=10, Z_c=4$ ; Wald  $[4,4,1,1]$



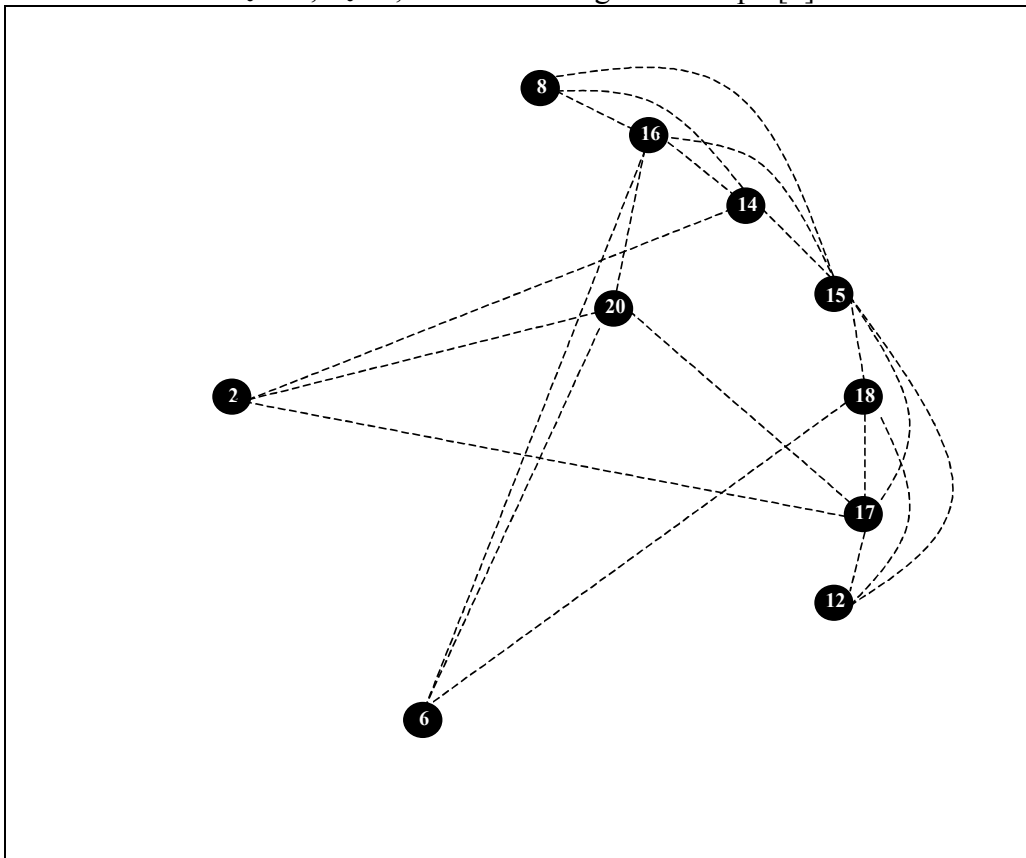
Negativer Optimumgraph von  $x^0$  bzgl.  $c=(0;20;4)$ :  
 $U_c=10, Z_c=1$ ; zusammenhängender Graph  $[1]$



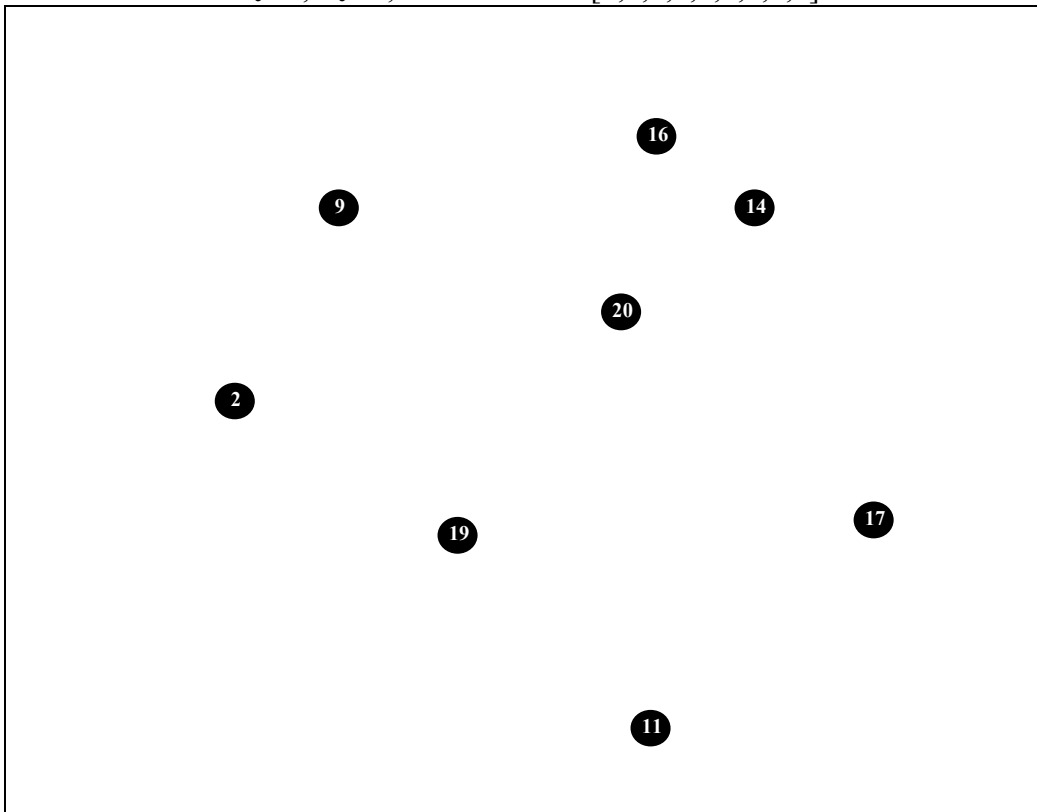
Positiver Optimumgraph von  $x^0$  bzgl.  $c=(4;20;4)^T$ :  
 $U_c=10, Z_c=2$ ; Graph [9,1]



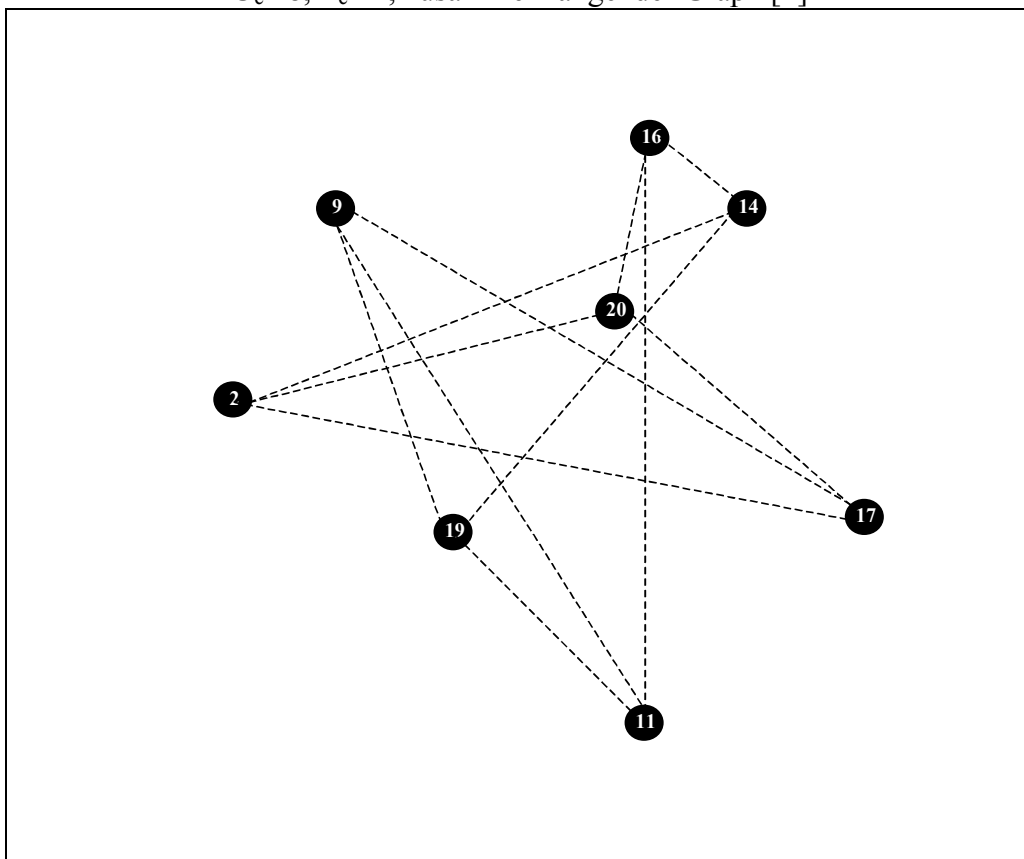
Negativer Optimumgraph von  $x^0$  bzgl.  $c=(4;20;4)^T$ :  
 $U_c=10, Z_c=1$ ; zusammenhängender Graph [1]



Positiver Optimumgraph von  $x^0$  bzgl.  $c=(2;24;4)^T$ :  
 $U_c=8, Z_c=8$ ; trivialer Wald  $[1,1,1,1,1,1,1,1]$

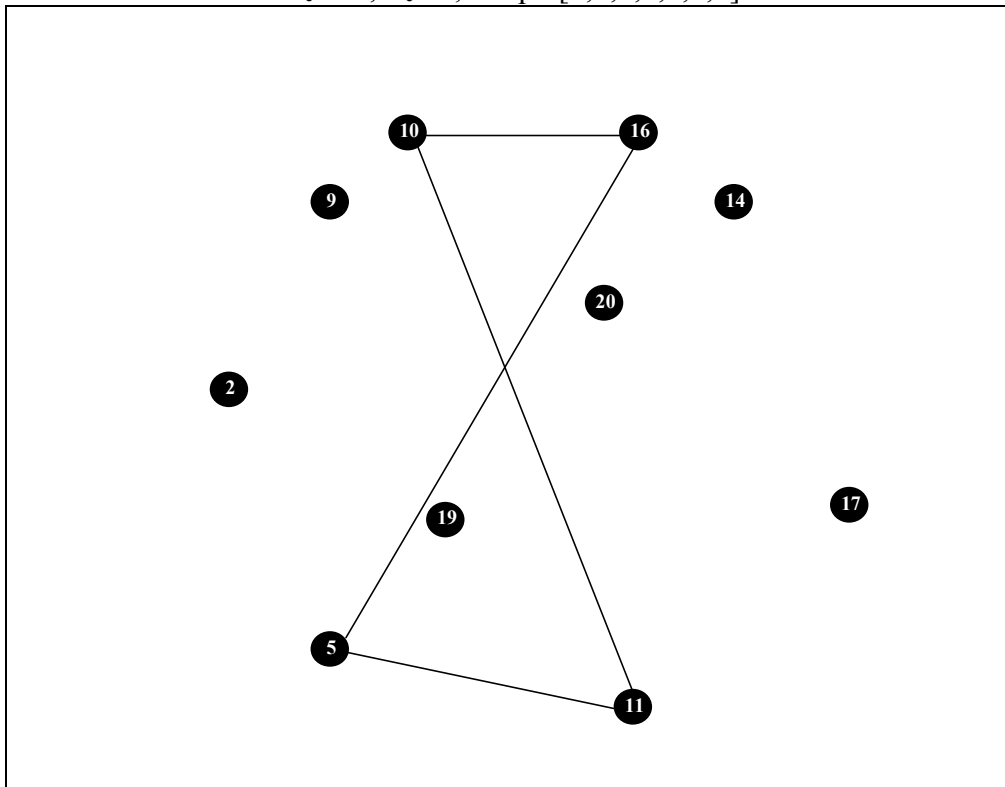


Negativer Optimumgraph von  $x^0$  bzgl.  $c=(2;24;4)^T$ :  
 $U_c=8, Z_c=1$ ; zusammenhängender Graph [1]

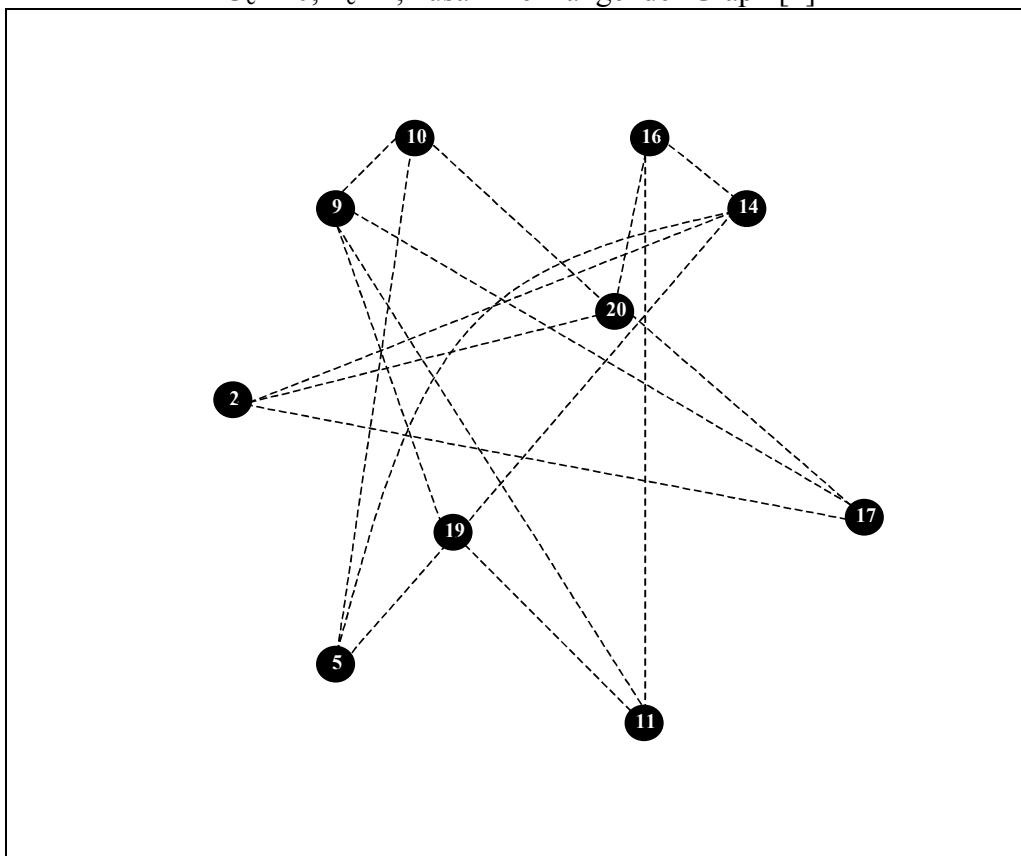




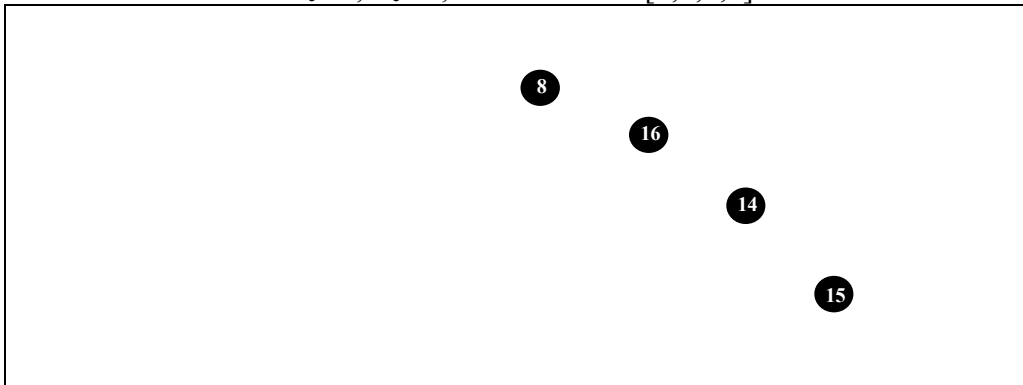
Positiver Optimumgraph von  $x^0$  bzgl.  $c=(2;26;4)^T$ :  
 $U_c=10, Z_c=7$ ; Graph  $[4,1,1,1,1,1]$



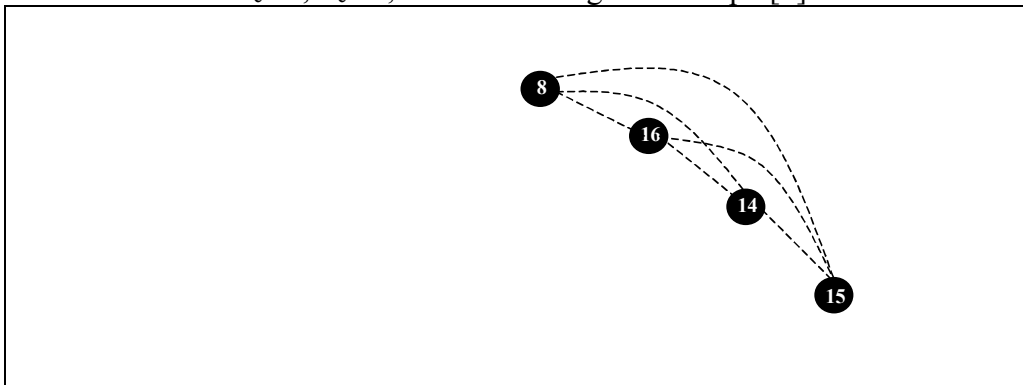
Negativer Optimumgraph von  $x^0$  bzgl.  $c=(2;26;4)^T$ :  
 $U_c=10, Z_c=1$ ; zusammenhängender Graph [1]



Positiver Optimumgraph von  $x^0$  bzgl.  $c=(2;19;4)^T$ :  
 $U_c=4, Z_c=4$ ; trivialer Wald  $[1,1,1,1]$



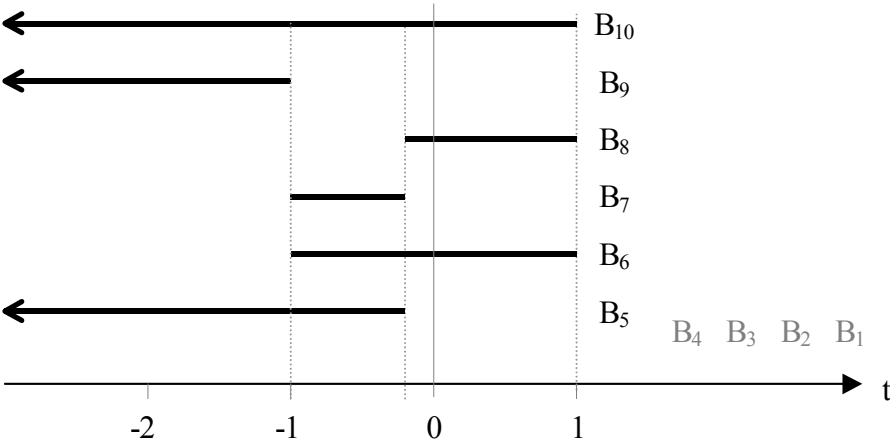
Negativer Optimumgraph von  $x^0$  bzgl.  $c=(2;19;4)^T$ :  
 $U_c=4, Z_c=1$ ; zusammenhängender Graph  $[1]$



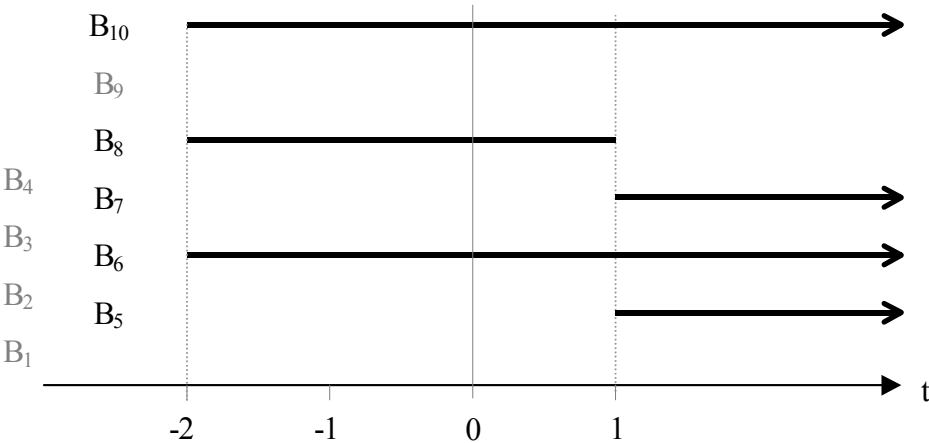
**Anhang 5: Simplextableaus zum Beispiel 3**

$c_j$	1	4	-1	0	0	0		
BV-Index	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4 (s_1)$	$x_5 (s_2)$	$x_6 (s_3)$	$x_B$	Basis-Nr.
1	1	0	0	-1	-2	2	0	<b>1</b>
2	0	1	0	1	1	-1	1	
3	0	0	1	-4	-3	4	0	
$\square z_j$	0	0	0	7	5	-6	4	
2	0,5	1	0	0,5	0	0	1	<b>2</b>
3	-2	0	1	-2	1	0	0	
6	0,5	0	0	-0,5	-1	1	0	
$\square z_j$	3	0	0	4	-1	0	4	
2	0,5	1	0	0,5	0	0	1	<b>3</b>
3	-1,5	0	1	-2,5	0	1	0	
5	-0,5	0	0	0,5	1	-1	0	
$\square z_j$	2,5	0	0	4,5	0	-1	4	
2	1	1	0	0	-1	1	1	<b>4</b>
3	-4	0	1	0	5	-4	0	
4	-1	0	0	1	2	-2	0	
$\square z_j$	7	0	0	0	-9	8	4	
2	0,2	1	0,2	0	0	0,2	1	<b>5</b>
4	0,6	0	-0,4	1	0	-0,4	0	
5	-0,8	0	0,2	0	1	-0,8	0	
$\square z_j$	-0,2	0	1,8	0	0	0,8	4	
1	1	0	-0,5	1	-0,5	0	0	<b>6</b>
2	0	1	0,25	0	0,25	0	1	
6	0	0	0,25	-1	-0,75	1	0	
$\square z_j$	0	0	1,5	1	0,5	0	4	<b>OPT</b>
1	1	0	-0,25	0	-1,25	1	0	<b>7</b>
2	0	1	0,25	0	0,25	0	1	
4	0	0	-0,25	1	0,75	-1	0	
$\square z_j$	0	0	1,75	0	-0,25	1	4	
1	1	0	-0,667	1,667	0	-0,667	0	<b>8</b>
2	0	1	0,333	-0,333	0	0,333	1	
5	0	0	-0,333	1,333	1	-1,333	0	
$\square z_j$	0	0	1,667	0,333	0	0,667	4	<b>OPT</b>
2	0	1	0,25	0	0,25	0	1	<b>9</b>
4	1	0	-0,5	1	-0,5	0	0	
6	1	0	-0,25	0	-1,25	1	0	
$\square z_j$	-1	0	2	0	1	0	4	
2	0,5	1	0	0,5	0	0	1	<b>10</b>
5	-2	0	1	-2	1	0	0	
6	-1,5	0	1	-2,5	0	1	0	
$\square z_j$	1	0	1	2	0	0	4	<b>OPT</b>

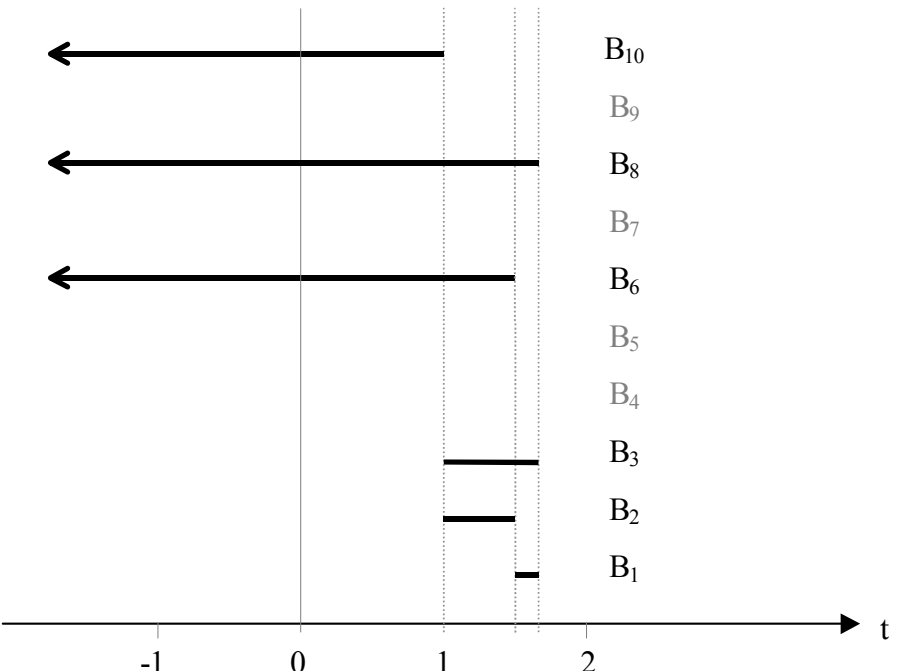
**Kritische Bereiche bzgl.  $c_1$ :**



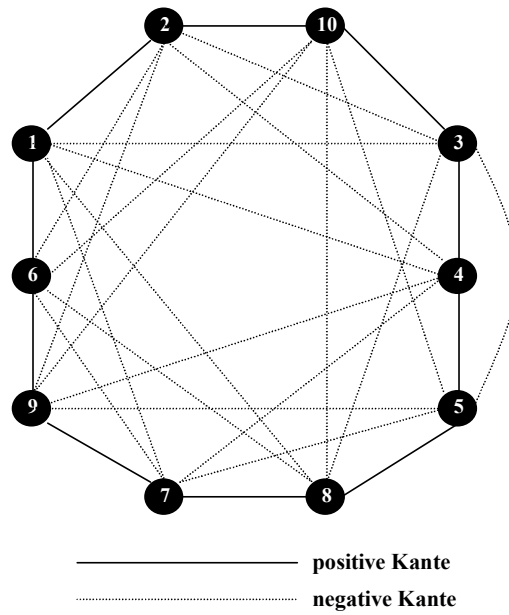
**Kritische Bereiche bzgl.  $c_2$ :**



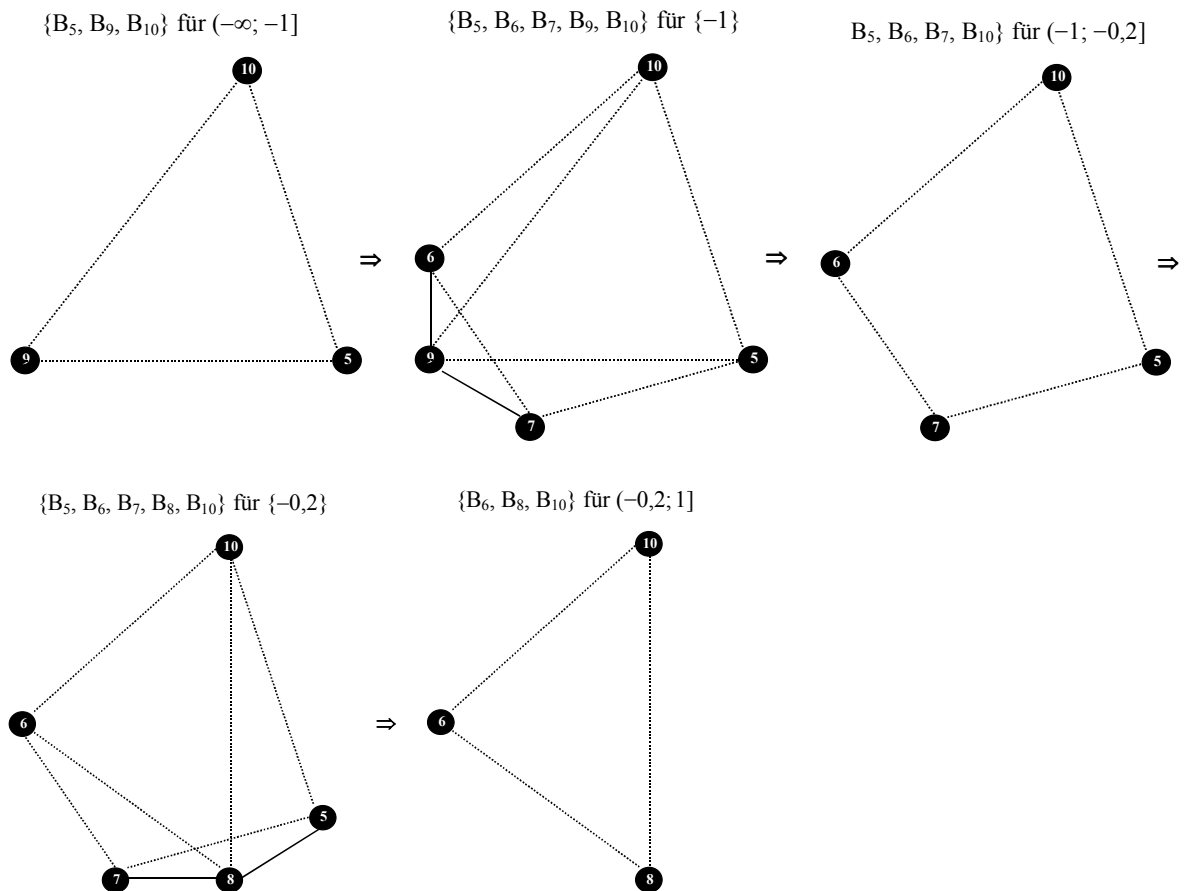
**Kritische Bereiche bzgl.  $c_3$ :**



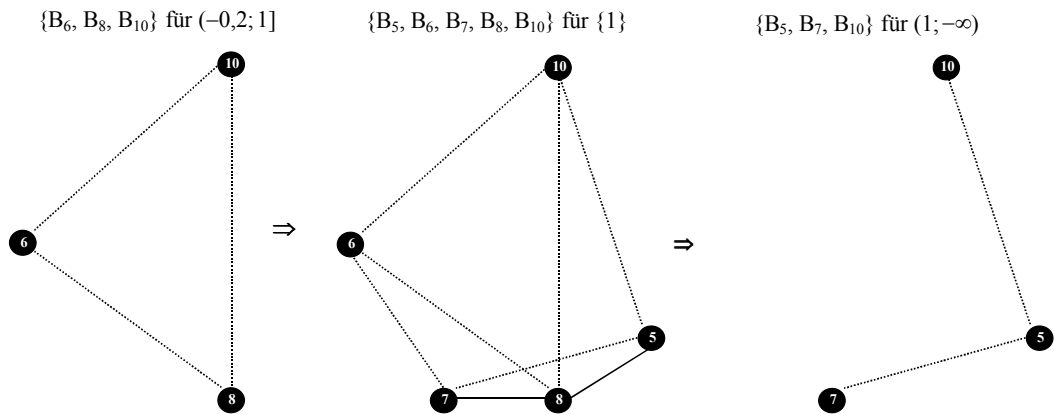
Allgemeiner Entartungsgraph der 2-entarteten Ecke  $x^0$  von Beispiel 3



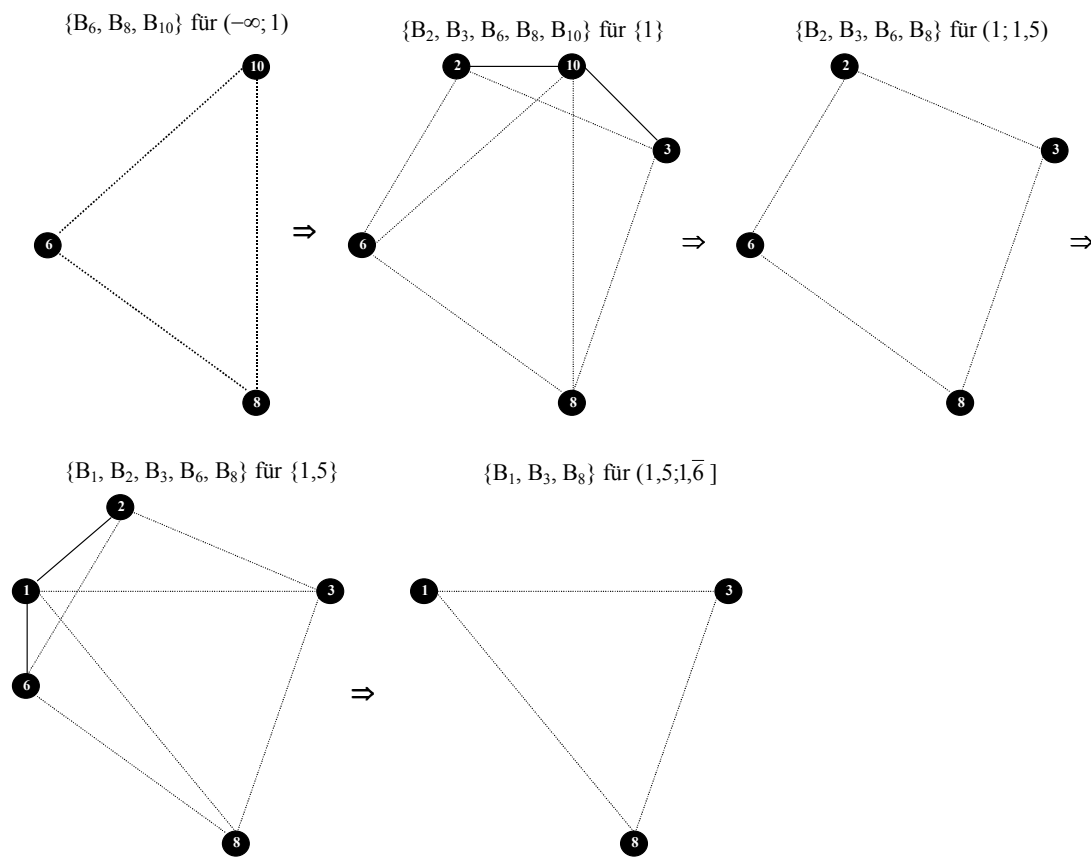
Übergänge der Optimumgraphen  $O_{c(t)}$  bzgl.  $c_1 + t_1$  für  $-\infty < t_1 < +\infty$ :



Übergänge der Optimumgraphen  $O_{c(t)}$  bzgl.  $c_2+t_2$  für  $-\infty < t_2 < +\infty$ :



Übergänge der Optimumgraphen  $O_{c(t)}$  bzgl.  $c_3+t_3$  für  $-\infty < t_3 < +\infty$ :



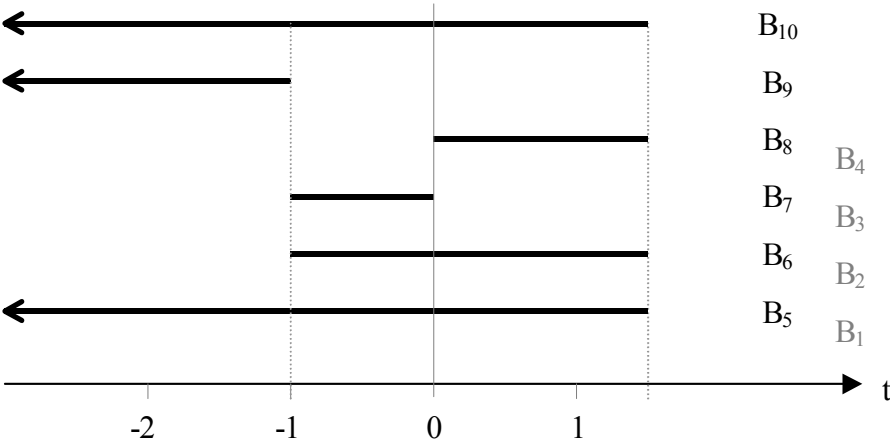
Als Repräsentantenmengen ergeben sich  $R_1 = \{B_{10}\}$ ,  $R_2 = \{B_6, B_{10}\}$  und  $R_3 = \{B_8\}$ .

**Anhang 6: Simplextableaus zum modifizierten Beispiel 3 ( $c_2 = 5$ )<sup>1</sup>**

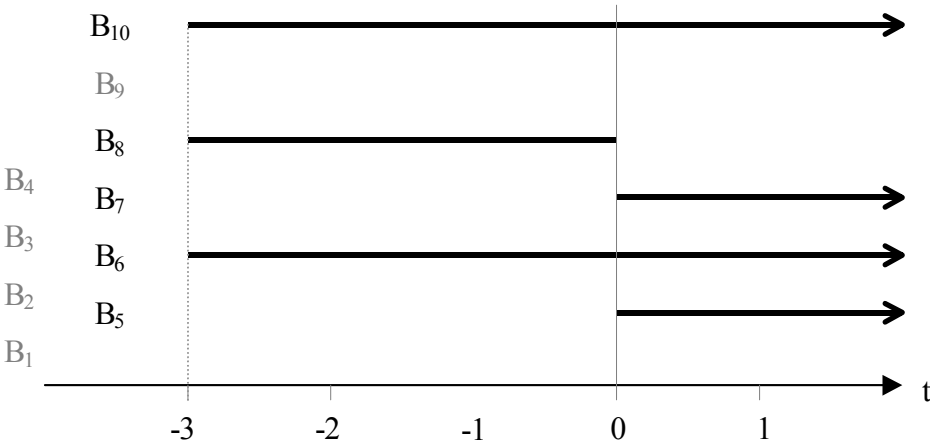
$c_j$	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>-1</b>	0	0	0		
<b>BV-Index</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4 (s_1)$	$x_5 (s_2)$	$x_6 (s_3)$	$x_B$	<b>Basis-Nr.</b>
1	1	0	0	-1	-2	2	0	<b>1</b>
2	0	1	0	1	1	-1	1	
3	0	0	1	-4	-3	4	0	
$\square z_j$	0	0	0	8	6	-7	5	
2	0,5	1	0	0,5	0	0	1	<b>2</b>
3	-2	0	1	-2	1	0	0	
6	0,5	0	0	-0,5	-1	1	0	
$\square z_j$	3,5	0	0	4,5	-1	0	5	
2	0,5	1	0	0,5	0	0	1	<b>3</b>
3	-1,5	0	1	-2,5	0	1	0	
5	-0,5	0	0	0,5	1	-1	0	
$\square z_j$	3	0	0	5	0	-1	5	
2	1	1	0	0	-1	1	1	<b>4</b>
3	-4	0	1	0	5	-4	0	
4	-1	0	0	1	2	-2	0	
$\square z_j$	8	0	0	0	-10	9	5	
2	0,2	1	0,2	0	0	0,2	1	<b>5</b>
4	0,6	0	-0,4	1	0	-0,4	0	
5	-0,8	0	0,2	0	1	-0,8	0	
$\square z_j$	0	0	2	0	0	1	5	<b>OPT</b>
1	1	0	-0,5	1	-0,5	0	0	<b>6</b>
2	0	1	0,25	0	0,25	0	1	
6	0	0	0,25	-1	-0,75	1	0	
$\square z_j$	0	0	1,75	1	0,75	0	5	<b>OPT</b>
1	1	0	-0,25	0	-1,25	1	0	<b>7</b>
2	0	1	0,25	0	0,25	0	1	
4	0	0	-0,25	1	0,75	-1	0	
$\square z_j$	0	0	2	0	0	1	5	<b>OPT</b>
1	1	0	-0,667	1,667	0	-0,667	0	<b>8</b>
2	0	1	0,333	-0,333	0	0,333	1	
5	0	0	-0,333	1,333	1	-1,333	0	
$\square z_j$	0	0	2	0	0	1	5	<b>OPT</b>
2	0	1	0,25	0	0,25	0	1	<b>9</b>
4	1	0	-0,5	1	-0,5	0	0	
6	1	0	-0,25	0	-1,25	1	0	
$\square z_j$	-1	0	2,25	0	1,25	0	5	
2	0,5	1	0	0,5	0	0	1	<b>10</b>
5	-2	0	1	-2	1	0	0	
6	-1,5	0	1	-2,5	0	1	0	
$\square z_j$	1,5	0	1	2,5	0	0	5	<b>OPT</b>

<sup>1</sup> Die Modifikation am Beispiel 3 besteht lediglich in der Änderung des Zielkoeffizienten  $c_2 = 4$  in  $c_2 = 5$ .

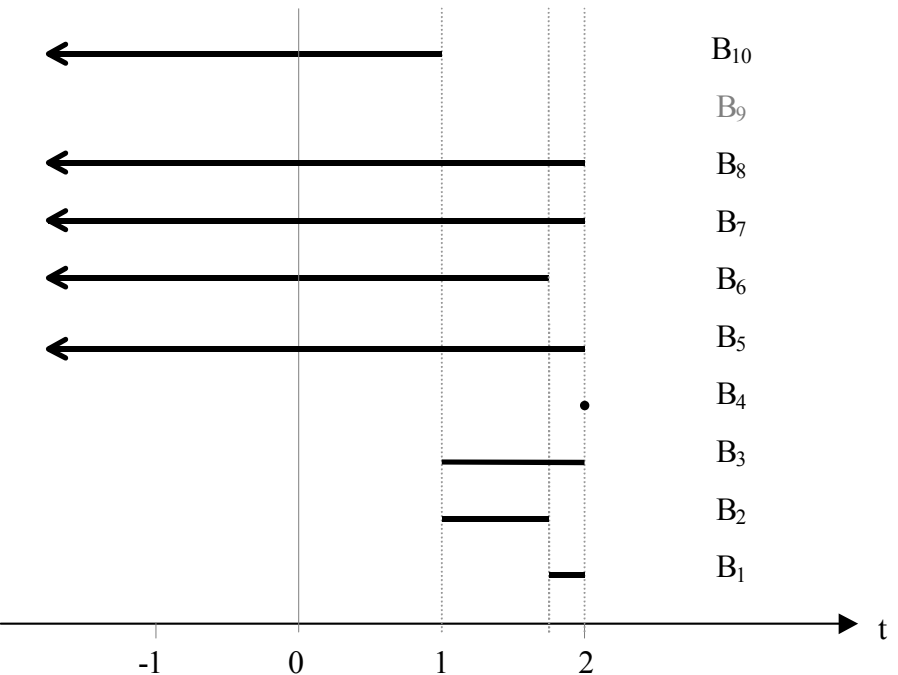
**Kritische Bereiche bzgl.  $c_1$ :**



**Kritische Bereiche bzgl.  $c_2$ :**



**Kritische Bereiche bzgl.  $c_3$ :**





Es sind 5 Basen der 2-entarteten Ecke  $\mathbf{x}^0$  bzgl.  $\mathbf{c} = (1; 5; -1)^T$  optimal, denn die Optimalbasenmenge ist  $B_c^0 = \{B_5, B_6, B_7, B_8, B_{10}\}$ . Der Optimumgraph  $O_c$  ist punktuell bzgl.  $c_1$  und  $c_2$  sowie extensiv bzgl.  $c_3$ . Als Repräsentantenmengen ergeben sich  $R_1 = \{B_5, B_{10}\}$ ,  $R_2 = \{B_6, B_{10}\}$  und  $R_3 = \{B_5, B_7, B_8\}$ . Zusätzlich tritt das Phänomen einer *punktuell optimalen Basis* auf, denn die Basis  $B_4$  hat das einelementige Intervall  $[2; 2]$  als kritischen Bereich bzgl.  $c_3$  (genauer gesagt ist  $B_4$  punktuell optimalisierbar bzgl.  $c_3$  und punktuell optimal bzgl.  $\mathbf{c} + 2 \cdot \mathbf{e}^3$ ).

## Anhang 7: Verallgemeinerungen zum Beispiel 4

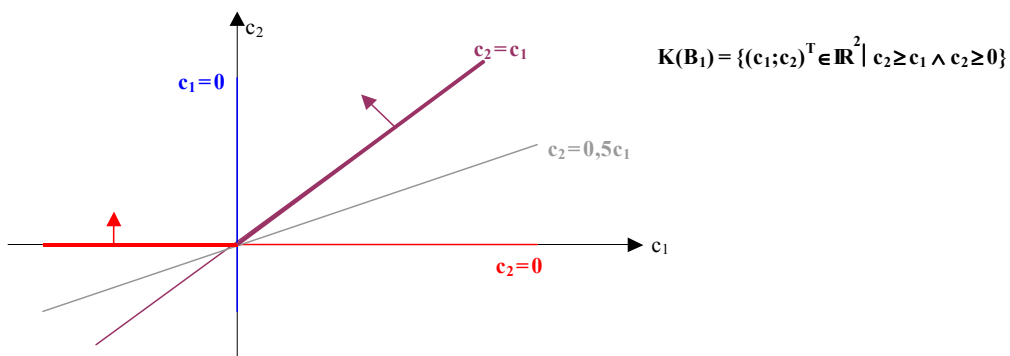
Betrachte das LOP aus Beispiel 4, erweitert um eine (redundante) Restriktion:

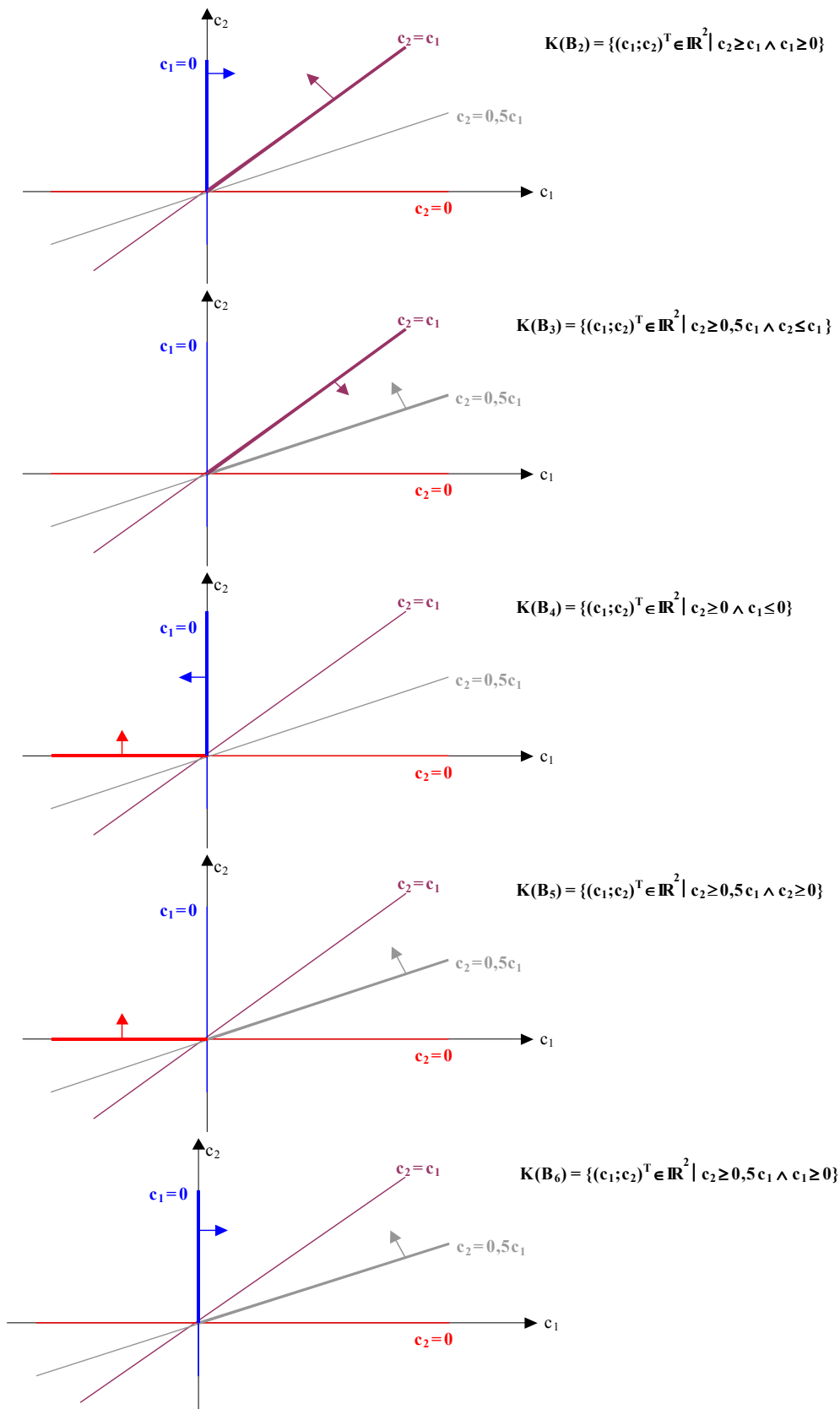
$\max! c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$  u.d.N.  $x_1 + x_2 \leq 1$ ,  $x_2 \leq 1$ ,  $2 \cdot x_1 + x_2 \leq 1$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ .

Der Lösungsraum  $X$  besteht aus den nichtentarteten Ecken  $(0;0)^T$  und  $(0,5;0)^T$  sowie der entarteten Ecke  $(0;1)^T$  mit  $\sigma=2$  und  $U=6$ . Die Simplextableaus zur entarteten Ecke sind:

		$c_1$	$c_2$	0	0	0	
$c_j$	BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_B$
$c_2$	2	1	1	1	0	0	1
0	4	-1	0	-1	1	0	0
0	5	1	0	-1	0	1	0
<b>B<sub>1</sub></b>	$\Delta z_j$	$c_2 - c_1$		$c_2$			
$c_2$	2	0	1	0	1	0	1
$c_1$	1	1	0	1	-1	0	0
	5	0	0	-2	1	1	0
<b>B<sub>2</sub></b>	$\Delta z_j$			$c_1$	$c_2 - c_1$		
$c_2$	2	0	1	2	0	-1	1
	4	0	0	-2	1	1	0
$c_1$	1	1	0	-1	0	1	0
<b>B<sub>3</sub></b>	$\Delta z_j$			$2c_2 - c_1$		$c_1 - c_2$	
$c_2$	2	0	1	0	1	0	1
	3	1	0	1	-1	0	0
	5	2	0	0	-1	1	0
<b>B<sub>4</sub></b>	$\Delta z_j$	$-c_1$			$c_2$		
$c_2$	2	2	1	0	0	1	1
	4	-2	0	0	1	-1	0
	3	-1	0	1	0	-1	0
<b>B<sub>5</sub></b>	$\Delta z_j$	$2c_2 - c_1$				$c_2$	
$c_2$	2	0	1	0	1	0	1
$c_1$	1	1	0	0	-0,5	0,5	0
	3	0	0	1	-0,5	-0,5	0
<b>B<sub>6</sub></b>	$\Delta z_j$				$c_2 - 0,5 \cdot c_1$	$0,5 \cdot c_1$	

Graphische Veranschaulichung der Optimalkegel  $K(B_u)$  zur Basis  $B_u$  ( $u=1, \dots, 6$ ):





Auf kanonische Weise ergeben sich 5 verschiedene Optimalbasenmengen (bzw. 5 dadurch induzierte Optimumgraphen), nämlich  $\{1,4,5\}$ ,  $\{1,2,4,5,6\}$ ,  $\{1,2,5,6\}$ ,  $\{1,2,3,5,6\}$  und  $\{3,5,6\}$ . Diese Anzahl entspricht den Formeln (26) und (27), d.h.

$$O(2, \sigma) \leq O_{\max}(2, \sigma) = 2\sigma + 1 = 2 \cdot U_{\max} - 1 - \sigma \cdot (\sigma + 1).$$

Durch Einsetzung von  $\sigma=2$  und  $U=U_{\max}=6$  ergibt sich sogar die Gleichheit.

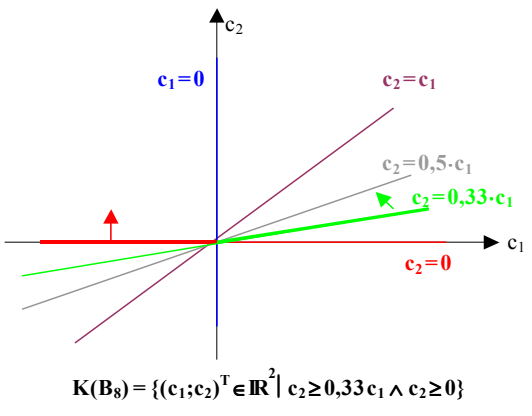
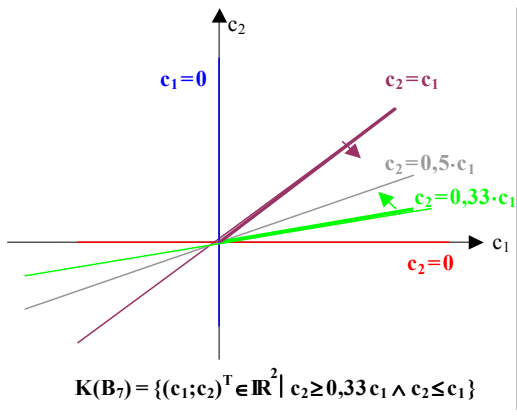
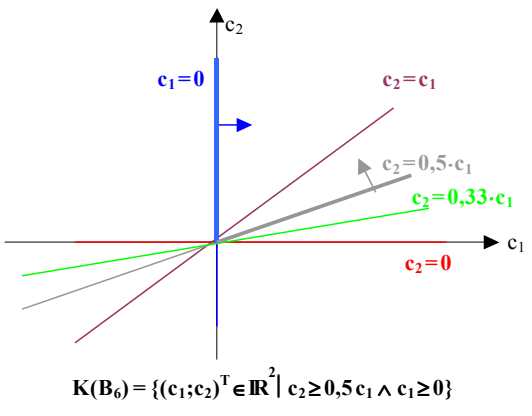
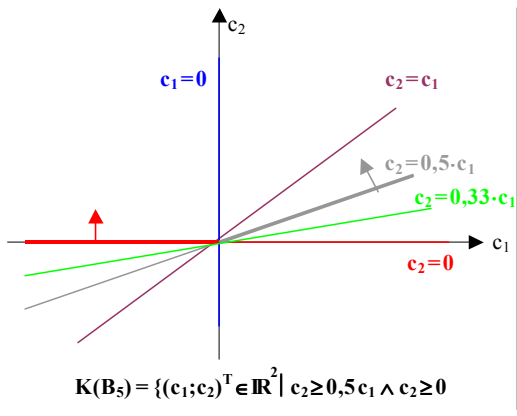
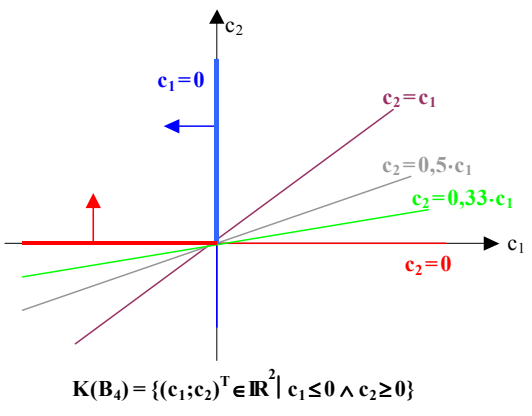
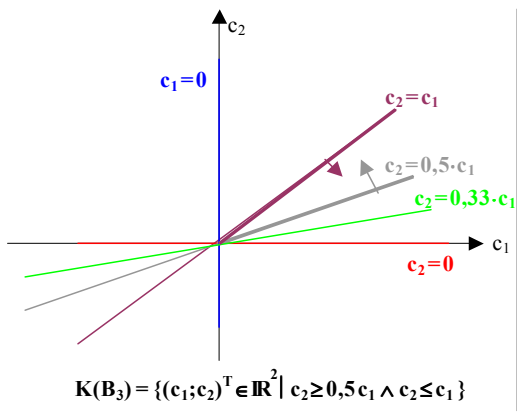
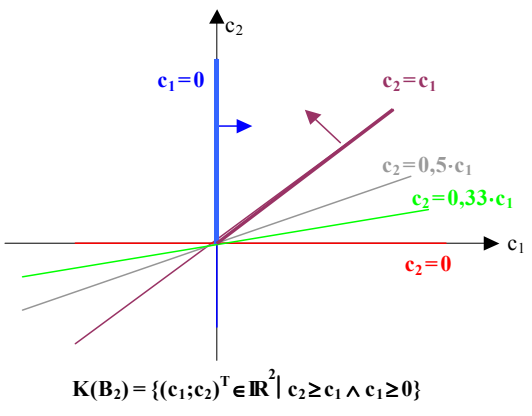
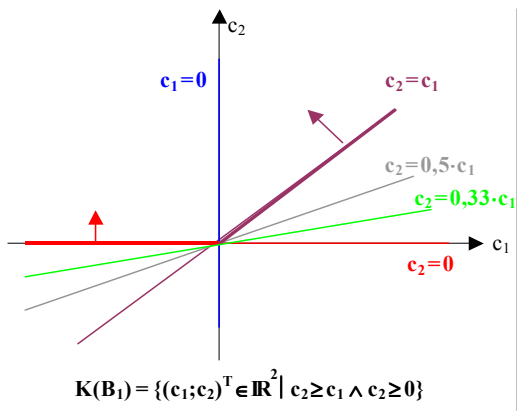
Man betrachte nun das um die Restriktion  $3 \cdot x_1 + x_2 \leq 1$  erweiterte LOP:

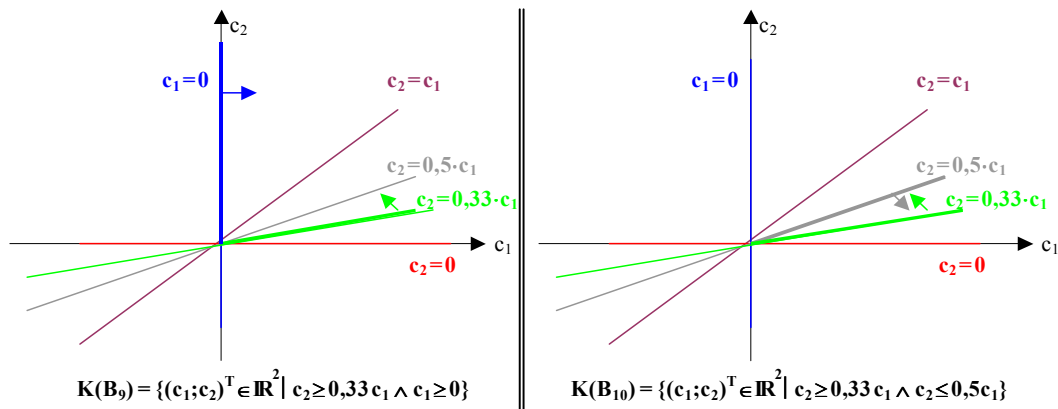
$\max! c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$  u.d.N.  $x_1 + x_2 \leq 1, x_2 \leq 1, 2 \cdot x_1 + x_2 \leq 1, 3 \cdot x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ .

Der Lösungsraum X besteht aus den nichtentarteten Ecken  $(0;0)^T$  und  $(1/3;0)^T$  sowie der entarteten Ecke  $(0;1)^T$  mit  $\sigma=3$  und  $U=10$ . Die Simplextableaus zur entarteten Ecke sind:

		$c_1$	$c_2$	0	0	0		
$c_j$	BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_B$
$c_2$	<b>2</b>	1	1	1	0	0	0	1
	<b>4</b>	-1	0	-1	1	0	0	0
	<b>5</b>	1	0	-1	0	1	0	0
	<b>6</b>	2	0	-1	0	0	1	0
<b>B<sub>1</sub></b>	<b><math>\Delta z_j</math></b>	<b><math>c_2 - c_1</math></b>		<b><math>c_2</math></b>				
$c_2$	<b>2</b>	0	1	0	1	0	0	1
$c_1$	<b>1</b>	1	0	1	-1	0	0	0
	<b>5</b>	0	0	-2	1	1	0	0
	<b>6</b>	0	0	-3	2	0	1	0
<b>B<sub>2</sub></b>	<b><math>\Delta z_j</math></b>	<b><math>c_1</math></b>		<b><math>c_2 - c_1</math></b>				
$c_2$	<b>2</b>	0	1	2	0	-1	0	1
	<b>4</b>	0	0	-2	1	1	0	0
$c_1$	<b>1</b>	1	0	-1	0	1	0	0
	<b>6</b>	0	0	1	0	-2	1	0
<b>B<sub>3</sub></b>	<b><math>\Delta z_j</math></b>	<b><math>2c_2 - c_1</math></b>			<b><math>c_1 - c_2</math></b>			
$c_2$	<b>2</b>	0	1	0	1	0	0	1
	<b>3</b>	1	0	1	-1	0	0	0
	<b>5</b>	2	0	0	-1	1	0	0
	<b>6</b>	3	0	0	-1	0	1	0
<b>B<sub>4</sub></b>	<b><math>\Delta z_j</math></b>	<b><math>-c_1</math></b>		<b><math>c_2</math></b>				
$c_2$	<b>2</b>	2	1	0	0	1	0	1
	<b>4</b>	-2	0	0	1	-1	0	0
	<b>3</b>	-1	0	1	0	-1	0	0
	<b>6</b>	1	0	0	0	-1	1	0
<b>B<sub>5</sub></b>	<b><math>\Delta z_j</math></b>	<b><math>2c_2 - c_1</math></b>			<b><math>c_2</math></b>			
$c_2$	<b>2</b>	0	1	0	1	0	0	1
$c_1$	<b>1</b>	1	0	0	-0,5	0,5	0	0
	<b>3</b>	0	0	1	-0,5	-0,5	0	0
	<b>6</b>	0	0	0	0,5	-1,5	1	0
<b>B<sub>6</sub></b>	<b><math>\Delta z_j</math></b>	<b><math>c_2 - 0,5 \cdot c_1</math></b>			<b><math>0,5 \cdot c_1</math></b>			
$c_2$	<b>2</b>	0	1	1,5	0	0	-0,5	1
	<b>4</b>	0	0	-1,5	1	0	0,5	0
	<b>5</b>	0	0	-0,5	0	1	-0,5	0
$c_1$	<b>1</b>	1	0	-0,5	0	0	0,5	0
<b>B<sub>7</sub></b>	<b><math>\Delta z_j</math></b>	<b><math>1,5 \cdot c_2 - 0,5 \cdot c_1</math></b>				<b><math>0,5 \cdot c_1 - 0,5 \cdot c_2</math></b>		
$c_2$	<b>2</b>	3	1	0	0	0	1	1
	<b>4</b>	-3	0	0	1	0	-1	0
	<b>5</b>	-1	0	0	0	1	-1	0
	<b>3</b>	-2	0	1	0	0	-1	0
<b>B<sub>8</sub></b>	<b><math>\Delta z_j</math></b>	<b><math>3 \cdot c_2 - c_1</math></b>			<b><math>c_2</math></b>			
$c_2$	<b>2</b>	0	1	0	0	3	-2	1
	<b>4</b>	0	0	0	1	-3	2	0
$c_1$	<b>1</b>	1	0	0	0	-1	1	0
	<b>3</b>	0	0	1	0	-2	1	0
<b>B<sub>9</sub></b>	<b><math>\Delta z_j</math></b>	<b><math>3 \cdot c_2 - c_1</math></b>			<b><math>c_1 - 2 \cdot c_2</math></b>			
$c_2$	<b>2</b>	0	1	0	1	0	0	1
	<b>5</b>	0	0	0	-0,33333333	1	-0,66666667	0
$c_1$	<b>1</b>	1	0	0	-0,33333333	0	0,33333333	0
	<b>3</b>	0	0	1	-0,66666667	0	-0,33333333	0
<b>B<sub>10</sub></b>	<b><math>\Delta z_j</math></b>	<b><math>c_2 - 0,333 \cdot c_1</math></b>			<b><math>0,333 \cdot c_1</math></b>			

Graphische Veranschaulichung der Optimalkegel  $K(B_u)$  zur Basis  $B_u$  ( $u=1, \dots, 10$ ):





Auf kanonische Weise ergeben sich 7 Optimalbasenmengen (bzw. Optimumgraphen), nämlich  $\{1,4,5,8\}$ ,  $\{1,2,4,5,6,8,10\}$ ,  $\{1,2,5,6,8,10\}$ ,  $\{1,2,3,5,6,7,8,10\}$ ,  $\{3,5,6,7,8,10\}$ ,  $\{3,5,6,7,8,9,10\}$  und  $\{7,8,9,10\}$ . Diese Anzahl entspricht den Formeln (26) und (27), d.h.

$$O(2, \sigma) \leq O_{\max}(2, \sigma) = 2\sigma + 1 = 2 \cdot U_{\max} - 1 - \sigma \cdot (\sigma + 1).$$

Durch Einsetzung von  $\sigma=3$  und  $U=U_{\max}=10$  ergibt sich sogar die Gleichheit.

Falls die Restriktionen, welche den Entartungsgrad der Ecke  $(0;1)^T$  erhöhen, verschieden voneinander sind, ergibt sich die Gleichheit  $U=U_{\max}$  und somit die Erfüllung der obigen Ungleichung als Gleichung. Falls die Restriktionen (teilweise) identisch sind, sodass  $U < U_{\max}$  gilt, verändert sich die Anzahl der verschiedenen Optimumgraphen. Beispielsweise werden im Folgenden die 4 Restriktionen, welche den Entartungsgrad  $\sigma=3$  der Ecke  $(0;1)^T$  hervorrufen, unterschiedlich gleich gesetzt:

max!  $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$  u.d.N.  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$  sowie

- 1)  $x_1 + x_2 \leq 1, x_2 \leq 1, 2 \cdot x_1 + x_2 \leq 1, 3 \cdot x_1 + x_2 \leq 1 \Rightarrow U=10=U_{\max}; O(2,3)=7$
- 2)  $x_1 + x_2 \leq 1, x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 1, 3 \cdot x_1 + x_2 \leq 1 \Rightarrow U=9 < U_{\max}; O(2,3)=5$   
und zwar:  $\{1,4,5,8\}, \{1,2,4,5,6,8,10\}, \{1,2,5,6,8,10\}, \{1,2,5,6,7,8,9,10\}$  und  $\{7,8,9,10\}$ .
- 3)  $x_1 + x_2 \leq 1, x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 1 \Rightarrow U=7 < U_{\max}; O(2,3)=3$   
und zwar:  $\{1,4,5,8\}, \{1,2,4,5,6,8,10\}, \{1,2,5,6,8,10\}$ .
- 4)  $x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 1, 2 \cdot x_1 + x_2 \leq 1, 2 \cdot x_1 + x_2 \leq 1 \Rightarrow U=8 < U_{\max}; O(2,3)=3$   
und zwar:  $\{1,4,5,8\}, \{1,3,4,5,6,7,8,10\}, \{3,5,6,7,8,10\}$ .
- 5)  $x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 1 \Rightarrow U=4 < U_{\max}; O(2,3)=1$   
und zwar:  $\{1,4,5,8\}$ .
- 6)  $x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 1, 3 \cdot x_1 + x_2 \leq 1 \Rightarrow U=6 < U_{\max}; O(2,3)=3$   
und zwar:  $\{1,4,5,8\}, \{1,4,5,7,8,9\}, \{7,8,9\}$ .

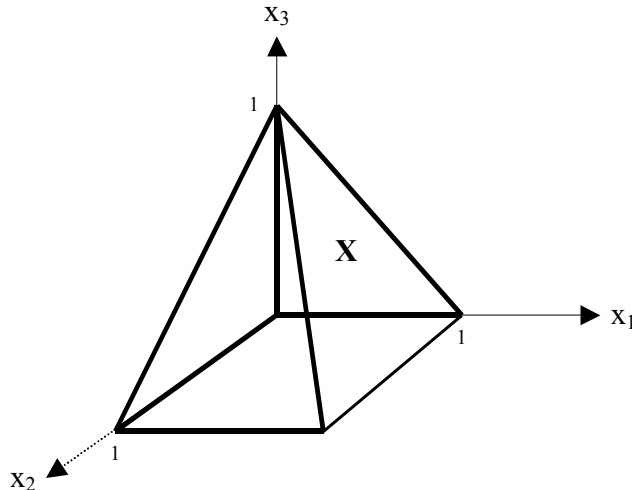
Die obigen Beispiele 3), 4) und 6) zeigen, dass die naheliegende Vermutung einer Darstellungsmöglichkeit der Anzahl der Optimumgraphen durch  $\sigma$  und  $U$  *nicht* gilt.

### Anhang 8: Ausführungen zum Beispiel 5

Gegeben sei das folgende LOP:

$$\begin{aligned} \max! \quad & c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 \\ \text{u.d.N.} \quad & x_1 + x_3 \leq 1, \\ & x_2 + x_3 \leq 1, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

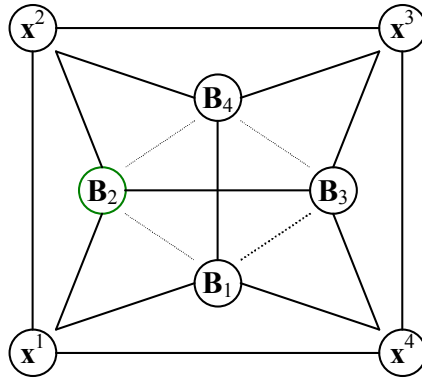
Der Lösungsraum  $X \subset \mathbb{R}^3$  stellt eine quadratische Pyramide dar und besteht aus den nicht-entarteten Ecken  $(0;0;0)^T$ ,  $(1;0;0)^T$ ,  $(0;1;0)^T$  und  $(1;1;0)^T$  sowie der entarteten Ecke  $(0;0;1)^T$  mit dem Entartungsgrad  $\sigma=1$  und der Entartungszahl  $U=4=U_{\max}$ :



Die zu den Ecken gehörenden Simplextableaus sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

BV-Index	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4 (s_1)$	$x_5 (s_2)$	$x_B$	Ecke (Basis)
4	1	0	1	1	0	1	$(0;0;0)^T$
5	0	1	1	0	1	1	
$\Delta z_j$	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$			<b>0</b>	
1	1	0	1	1	0	1	$(1;0;0)^T$
5	0	1	1	0	1	1	
$\Delta z_j$		$-c_2$	$c_1 - c_3$	$c_1$		$c_1$	
4	1	0	1	1	0	1	$(0;1;0)^T$
2	0	1	1	0	1	1	
$\Delta z_j$	$-c_1$		$c_2 - c_3$	$c_2$		$c_2$	
1	1	0	1	1	0	1	$(1;1;0)^T$
2	0	1	1	0	1	1	
$\Delta z_j$			$c_1 + c_2 - c_3$	$c_1$	$c_2$	$c_1 + c_2$	
3	1	0	1	1	0	1	$(0;0;1)^T$
5	-1	1	0	-1	1	0	
$\Delta z_j$	$c_3 - c_1$	$-c_2$		$c_3$		$c_3$	<b>B<sub>1</sub></b>
4	1	-1	0	1	-1	0	$(0;0;1)^T$
3	0	1	1	0	1	1	
$\Delta z_j$	$-c_1$	$c_3 - c_2$			$c_3$	$c_3$	<b>B<sub>2</sub></b>
3	0	1	1	0	1	1	$(0;0;1)^T$
1	1	-1	0	1	-1	0	
$\Delta z_j$		$c_3 - c_1 - c_2$		$c_1$	$c_3 - c_1$	$c_3$	<b>B<sub>3</sub></b>
3	1	0	1	1	0	1	$(0;0;1)^T$
2	-1	1	0	-1	1	0	
$\Delta z_j$	$c_3 - c_1 - c_2$			$c_3 - c_2$	$c_2$	$c_3$	<b>B<sub>4</sub></b>

Es ergibt sich der folgende Darstellungsgraph von  $X$  und der darin enthaltene (allgemeine) Entartungsgraph von  $\mathbf{x}^0$ :



Für jede der 4 Basen  $\mathbf{B}_u$  zur 1-entarteten Ecke  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^3$  gehört ein Optimalkegel  $K(\mathbf{B}_u)$ , der von jeweils drei (Hyper-)Ebenen begrenzt wird ( $u=1, \dots, 4$ ):

$$K(\mathbf{B}_1) = \{(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{c}_2 \leq 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_1\},$$

$$K(\mathbf{B}_2) = \{(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{c}_1 \leq 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_2\},$$

$$K(\mathbf{B}_3) = \{(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{c}_1 \geq 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_1 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\},$$

$$K(\mathbf{B}_4) = \{(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{c}_2 \geq 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_2 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\}.$$

Zwecks Ermittlung aller Optimumgraphen sind sämtliche Schnittkegel bzgl.  $\mathbf{x}^0$  zu bestimmen, d.h. alle nichttrivialen Schnitte der obigen Optimalkegel. Umgekehrt kann man zu diesem Zweck auch untersuchen, welche nichtleere Teilmenge der Basenmenge  $\mathbf{B}^0 = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4\}$  eine Optimalbasenmenge von  $\mathbf{x}^0$  darstellt; dies ist gleichbedeutend damit, dass es einen Zielkoeffizientenvektor  $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)^T \in \mathbb{R}^3$  mit  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$  gibt, für den ausschließlich die Basen der jeweiligen Teilmenge optimal sind (d.h. die übrigen Basen sind dual unzulässig).

Die Basenmenge  $\mathbf{B}^0 = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4\}$  selber ist genau dann eine Optimalbasenmenge von  $\mathbf{x}^0$ , wenn alle Basen gleichzeitig optimal sind, also ein Zielkoeffizientenvektor  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$  existiert, der in der Schnittmenge  $K(\mathbf{B}_1) \cap K(\mathbf{B}_2) \cap K(\mathbf{B}_3) \cap K(\mathbf{B}_4)$  liegt und somit folgende Bedingungen erfüllt:

$$\mathbf{c}_1 \leq 0 \wedge \mathbf{c}_1 \geq 0 \wedge \mathbf{c}_2 \leq 0 \wedge \mathbf{c}_2 \geq 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_1 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_2 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \Rightarrow \mathbf{c}_1 = 0 \wedge \mathbf{c}_2 = 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq 0.$$

Mit  $(0; 0; 1)^T$  existiert ein Zielkoeffizientenvektor  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ , der alle Bedingungen erfüllt und somit im Schnitt liegt. Also ist  $\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4\}$  eine Optimalbasenmenge von  $\mathbf{x}^0$ ; der zugehörige Schnittkegel ist  $K(\mathbf{B}_1) \cap K(\mathbf{B}_2) \cap K(\mathbf{B}_3) \cap K(\mathbf{B}_4) = \{(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{c}_1 = 0 \wedge \mathbf{c}_2 = 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq 0\}$ .

Die Teilmenge  $\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3\}$  ist genau dann eine Optimalbasenmenge von  $\mathbf{x}^0$ , wenn einerseits die Basen  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$  und  $\mathbf{B}_3$  optimal sind, aber die Basis  $\mathbf{B}_4$  nicht optimal ist, wenn also ein Punkt  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$  existiert, der in der Schnittmenge  $K(\mathbf{B}_1) \cap K(\mathbf{B}_2) \cap K(\mathbf{B}_3)$  liegt, aber kein Element von  $K(\mathbf{B}_4)$  ist. Gesucht ist also ein Punkt  $\mathbf{c} \in K(\mathbf{B}_1) \cap K(\mathbf{B}_2) \cap K(\mathbf{B}_3) \setminus K(\mathbf{B}_4)$ , der somit den folgenden Bedingungen genügt:

$$\mathbf{c}_1 \leq 0 \wedge \mathbf{c}_1 \geq 0 \wedge \mathbf{c}_2 \leq 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_1 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_2 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \wedge \neg(\mathbf{c}_2 \geq 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_2 \wedge \mathbf{c}_3 \geq \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) \Rightarrow \mathbf{c}_1 = 0 \wedge \mathbf{c}_2 \leq 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq 0 \wedge (\mathbf{c}_2 < 0 \vee \mathbf{c}_3 < \mathbf{c}_2 \vee \mathbf{c}_3 < \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) \Rightarrow \mathbf{c}_1 = 0 \wedge \mathbf{c}_2 < 0 \wedge \mathbf{c}_3 \geq 0.$$

Mit  $(0; -1; 1)^T$  existiert ein Zielkoeffizientenvektor  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ , der alle obigen Bedingungen erfüllt, d.h. für den die Basen  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$  und  $\mathbf{B}_3$  optimal sind und die Basis  $\mathbf{B}_4$  dual unzulässig ist. Somit

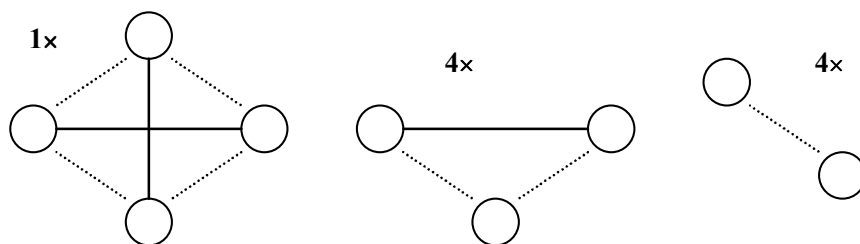


ist  $\{B_1, B_2, B_3\}$  eine Optimalbasenmenge von  $x^0$ ; der zugehörige Schnittkegel ist  $(K(B_1) \cap K(B_2) \cap K(B_3)) \setminus K(B_4) = \{(c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid c_1 = 0 \wedge c_2 < 0 \wedge c_3 \geq 0\}$ .

Die Anwendung dieses Untersuchungsschemas auf alle Teilmengen der Basenmenge von  $x^0$  ergibt die folgenden Optimalbasenmengen mit den zugehörigen Schnittkegeln:

Teilmenge der Basenmenge $B^0$ von $x^0$	Zielkoeffizientenvektor $c$ , für den <i>ausschließlich</i> diese Basen optimal sind	Zugehöriger Schnittkegel
$\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$	$(0; 0; 1)^T$	$\{(c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid c_1 = 0 \wedge c_2 = 0 \wedge c_3 \geq 0\}$
$\{B_1, B_2, B_3\}$	$(0; -1; 1)^T$	$\{(c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid c_1 = 0 \wedge c_2 < 0 \wedge c_3 \geq 0\}$
$\{B_1, B_2, B_4\}$	$(-1; 0; 0)^T$	$\{(c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid c_1 < 0 \wedge c_2 \geq 0 \wedge c_3 \geq c_2\}$
$\{B_1, B_3, B_4\}$	$(1; 0; 2)^T$	$\{(c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid c_1 > 0 \wedge c_2 \geq 0 \wedge c_3 \geq c_1 + c_2\}$
$\{B_2, B_3, B_4\}$	$(0; 1; 2)^T$	$\{(c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid c_1 = 0 \wedge c_2 > 0 \wedge c_3 \geq c_2\}$
$\{B_1, B_2\}$	$(-1; -1; 0)^T$	$\{(c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid c_1 < 0 \wedge c_2 < 0 \wedge c_3 \geq 0\}$
$\{B_1, B_3\}$	$(1; -1; 2)^T$	$\{(c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid c_1 > 0 \wedge c_2 < 0 \wedge c_3 \geq c_1\}$
$\{B_1, B_4\}$	existiert nicht	
$\{B_2, B_3\}$	existiert nicht	
$\{B_2, B_4\}$	$(-1; 1; 2)^T$	$\{(c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid c_1 < 0 \wedge c_2 > 0 \wedge c_3 \geq c_2\}$
$\{B_3, B_4\}$	$(1; 1; 2)^T$	$\{(c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid c_1 > 0 \wedge c_2 > 0 \wedge c_3 \geq c_1 + c_2\}$
$\{B_1\}$	existiert nicht	
$\{B_2\}$	existiert nicht	
$\{B_3\}$	existiert nicht	
$\{B_4\}$	existiert nicht	

Demnach gibt es 9 verschiedene Optimalbasenmengen zur entarteten Ecke  $x^0$ . Die zugehörigen (allgemeinen) Optimumgraphen bilden drei Isomorphieklassen (die einzelnen Graphen einer Isomorphieklasse haben dieselbe Struktur):



## **Autoren und Kontakte**

### **Autor**

Prof. Dr. rer. pol. Hermann-Josef Kruse

### **Kontaktdaten**

Fachhochschule Bielefeld  
Fachbereich Ingenieurwissenschaften und Mathematik  
FSP Angewandte Mathematische Modellierung und Optimierung

Am Stadtholz 24  
33609 Bielefeld

*Tel.:* +49.521.106-7403

*Fax:* +49.521.106-7176

*E-Mail:* [ammo@fh-bielefeld.de](mailto:ammo@fh-bielefeld.de)

*Web:* [www.fh-bielefeld.de/ammo](http://www.fh-bielefeld.de/ammo)

*Ansprechpartner:* Prof. Dr. Dr. Rainer Ueckerdt

*Tel.:* +49.521.106-7411

*Fax:* +49.521.106-7176

*E-Mail:* [hermann-josef.kruse@fh-bielefeld.de](mailto:hermann-josef.kruse@fh-bielefeld.de)

*Ansprechpartner:* Prof. Dr. Hermann-Josef Kruse

### **Veröffentlichungsreihe:**

#### **AMMO – Berichte aus Forschung und Technologietransfer**

Heft 1: Dezember 2013, AMMO-Team, *Informationen über den Forschungs- und Entwicklungsschwerpunkt Angewandte Mathematische Modellierung und Optimierung.*

Heft 2: April 2014, R. Walden und V.-M. Roemer, *Methoden der quantitativen rechnergestützten CTG-Analyse.*

Heft 3: Juli 2014, R. Ueckerdt, H.-W. Schmidt, M. Weber, E. Mindlina, *Entwicklung einer Dispatcherfunktion zur Überprüfung von Nominierungsmengen in der Betriebsführung von Erdgasspeichern.*

Heft 4: September 2014, S. Proß, *Diskrete Modellierung und Optimierung praxisrelevanter Prozesse mit Petri-Netzen.*

ISSN 2198-4824

Herausgeber: Sprecher FSP AMMO  
Fachhochschule Bielefeld